トポロジーへの誘い

多様体と次元をめぐって

松本幸夫 著

遊星社

まえがき

平面は平らな 2 次元空間であり，曲面は曲がった 2 次元空間である．一般の n 次元でも，“平らな” n 次元空間や曲がった n 次元空間が考えられる．それらは “多様体” とよばれる空間であり，現代幾何学の主要な研究対象となっている．この本のテーマである “多様体のトポロジー” は多様体の “かたち”（位相幾何学的なかたち）を調べる数学の分野である．

歴史的には，リーマンやポアンカレの研究に遡（さかのぼ）りうるが，多様体のトポロジーが急激に展開し始めるのは 1950 年代からである．1950 年，60 年代は高次元（5 次元以上）の多様体の研究が高揚した時期であり，1970 年代は主要な関心が低次元（3 次元, 4 次元）の多様体にシフトした時期である．そして，1980 年代から 4 次元多様体論が急速に進展する．2000 年代に入って 3 次元多様体論に新展開があり，ペレルマンによってポアンカレ予想が 100 年ぶりに解決されるに至った．

この本は，多様体のトポロジーの “超入門書” である．とくに，“次元” によって多様体の性質が劇的に変化する様子を伝えるように努めた．主要な部分は 1986 年発行の『幾何学をみる』の一部として出版されたものであるが，今回，単行本化するに当たって，第 6 章「ベクトル束と特性類」，第 7 章「その後の発展」を書き加えた．また，『数学セミナー』1983 年 5 月号と 1990 年 8 月号に掲載された

２つの記事を，それぞれ付録１，付録２として巻末に収めた．

多様体のトポロジーをのぞいてみようという読者にこの本が少しでもお役に立てば，著者としては望外の幸せである．

2008 年 1 月

松本幸夫

目　　次

1

トポロジーと次元

トポロジーでは，次元の果たす役割は決定的である．どのように“決定的”なのか．それをこれから見ていくことにしよう．

トポロジーは幾何学の一種で，図形とか空間を研究する．しかし，その考え方は，普通の幾何学とはだいぶ違う．たとえば，図形の大きさなどはあまり問題にしない．三角形を研究する場合にも，必要に応じて大きくしたり小さくしたりして考えるので，その三角形の面積などは研究対象にならない．また，直線も時によっては針金細工のように曲げたり伸ばしたりしてよく，直線と曲線を区別して考えることもしない．だから，三角形の3辺も円弧のように丸くしてもかまわない．こうなると，三角形と円の区別もなくなってしまう．このように，図形や空間を自由に“連続変形”して調べることがトポロジーに固有の方法である．トポロジーの眼で見ると，ミロのビーナスも粘土のボールも同じような形に見えるわけである．

しかし，いろいろな図形を曲げたり伸ばしたりして楽しむことがトポロジーの目的ではない．図形をさまざまに変形してみるのは，そういう変形を施してもなお不変に保たれる図形の性質を見いだすためなのである．

ちょっと考えてみればわかるように，三角形を円に変えたり，直線を曲線に変えたりしてしまっては，図形のもつ幾何学的性質はたいてい変わってしまう．そんなに自由な連続変形を通して変わらない性質などあるのだろうか．

それはある．その答えを言う前に，“連続変形”というものについて，もう少し説明しておこう．やや標語ふうに言うと，

連続変形ではハサミとノリを使ってはいけない

のである．たとえば，1本の直線を2本に切り離してはいけない．これが，ハサミは使えない，という意味である．それから，もとの図形の中で別々だった2点を同じ点にくっつけてはいけない．たとえば，線分の両端をくっつけて輪ゴムのようにしてはいけない．これが，ノリを使ってはいけない，という意味である．いくら自由な変形といっても，ハサミとノリを使った変形は許されない．しかし，それ以外のどんな連続変形も許される．そして，そのような連続変形で変わらないような図形（または空間）の性質を研究することがトポロジーの目的なのである．

では，連続変形で変わらない性質にはどんなものがあるだろうか．

ここで答えを書くと，読者はなんだそんなことかと思われるかもしれないが，たとえば，図形が全体としてひとつながりかどうかという性質（**連結性**）は，連続変形で変わらない性質のひとつである．ある図形がひとつながりのとき，その図形は**連結**であるという．たとえば，円板は連結である．また三角形も連結である．一方，2つの円板を全体として1つの図形と思ったとき，その図形は連結ではない(図1-1を見てください)．



図 1-1

円板を連続的に変形して三角形にしても四角形にしても，“連結である”という性質はたしかに不変である．連続変形は“ハサミを使わない”変形なので，変形の途中で，ひとつながりだった図形が突然２つに分かれることはないのである(図 1-2 を見てください)．

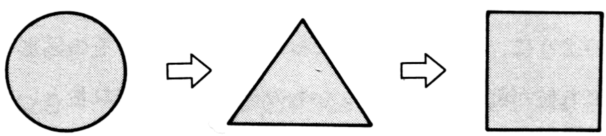


図 1-2

連結性は連続変形によって変わらない！ これはもっと厳密に証明できるトポロジーの定理なのである．

さて，連結性だけを問題にするなら，図形には２つの種類しか考えられない．つまり，連結な図形と，連結でない図形との 2 種類である．しかし，これだけではつまらないので，連結でない図形の方をもう少し詳しくみてみよう．

図 1-1 の右側の図形は，2 枚の円板を合わせて 1 つの図形とみなしたものであった．この図形は連結でないが，この図形を構成している各々の円板はもちろん連結である．つまり，この図形は２つの連

結な部分（円板）からできている．このように，連結でない図形は，一般に，いくつかの連結な部分が集まってできたものであることがわかる．連結な部分のことを，もとの図形の**連結成分**という．そして，その図形がいくつの連結成分から構成されているかという数を，その図形の**連結成分の個数**という．図 1-1 の右側の図形（２つの円板から構成されたもの）の連結成分の個数は 2 である．図形が連結であるということと，その図形の連結成分の個数が 1 であることとは同じことである．

ある図形を曲げたり伸ばしたりという連続変形で変形しても，その図形の連結成分の個数は変わらない．これは，連続変形がノリもハサミも使わない変形であることから明らかである．“連結成分の個数”のように，図形ごとに決まった数であって，その図形を連続変形しても値が変わらないようなものを，**位相不変な量**という．

ついでに，連結性のように，連続変形で変わらない図形の性質を**位相不変な性質**という．位相不変な量や性質がトポロジーの主な関心事なのである．（位相不変ということについては，あとの５章でもっと厳密に説明します.）

この本の主題となっている**次元**も，じつは位相不変な量である．いちばん大切な位相不変量であると言ってよい．

● 1 次元，2 次元，3 次元，etc.，…

では一体，次元とは何だろうか．空間や図形の次元はどのように定義されるのだろうか．残念ながら，ここでこの問いにまともに答えるわけにはいかない．というのは，現在，次元の定義には主なもので３つが知られており，それぞれ“小さな帰納的次元”“大きな帰

納的次元”“被覆次元”とよばれるものであるが，それぞれに一長一短があって，どれかひとつの定義に統一すべき積極的理由がないのである．しかも，ひとつの空間を指定したとき，その空間の次元を決めようとしても，上の3つの次元の定義のどれを使うかによって，出てくる次元が一致しないこともある．これは困ったことである．

しかし，本当はあまり困らない．というのは，上に述べた憂鬱（ゆううつ）な状況は，およそ考えうるすべての空間に適用可能な次元の定義を探し求めるときの話なのである．ひとくちに空間といっても，その仲間にはひどく異常な性質をもつものもある．そのような異常な性質の空間も含めたすべての空間や図形を，ただひとつの“次元論”にとり込もうとすると，どこかに少し無理なところが出てくるのはむしろ当然であろう．

幸いにも，これから考える空間や図形はみな素直な性質（といっても比較的素直だというにすぎないが）をもつものばかりなので，次元の厳密な定義という深刻な問題に煩わされずにすむ．これから出てくる空間や図形については，どの次元の定義を採用しても，同じ次元の値が決まり，それは，もっと直観的に説明できる次元の値と一致するのである．つまり，“次元”を直観的に考えても誤まるおそれはないのである．同じことなら話は簡単な方がよい．以下では，安心して気楽に“次元”を考えることにしよう．

さて，まず，直線は1次元である(図1-3)．

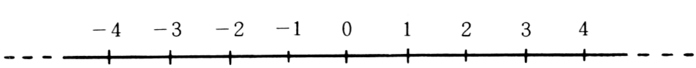


図 1-3

直線に目盛りをうって，数直線にしてみると，直線上の点と実数

(つまりその点の座標）とが1対1に対応する．いいかえれば，ただ**1つ**の実数を指定することにより，直線上の点の位置が決まる．直線が1次元であるというのはこの意味である．

直線をぐにゃぐにゃ曲げて曲線にしても，その曲線上に適当に目盛りをつけておけば，曲線上の点の位置は，やはりただ1個の実数で決まる(図 1-4)．だから，曲線も1次元である．

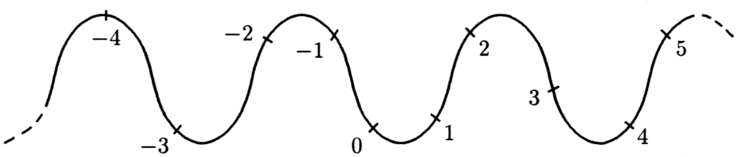


図 1-4

また，このことから曲げたり伸ばしたりという連続変形で次元が変わらないということ（次元の位相不変性）も直観的に納得できる．

次に，平面を考えてみよう．直線と違って，平面上の点の位置を決めるには，x 座標と y 座標の**2つの**実数の組 (x, y) を指定する必要がある(図 1-5)．この意味で，平面は2次元の空間である．直線上の点の位置はただ1つの実数で決まるのに，平面上では2つの実数が必要なのは，それだけ平面の方が点の動きまわる自由度が大きいからである．

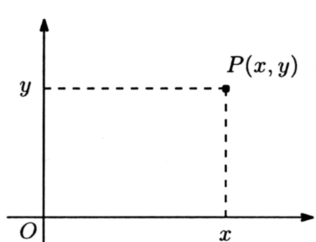


図 1-5

このことからわかるように，空間の次元は，空間の広がりを測る目安になっている．

曲面も平面と同じく 2 次元である．その理由は曲線のときと同様で，曲がった xy 座標を曲面上に描いてみると，2 つの実数の組 (x, y) で点の位置が指定できるからである（図 1-6）．

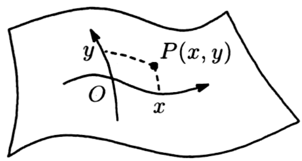


図 1-6

われわれの住んでいる空間では，点の位置を指定するのに，たて，よこ，高さを決める**3 つの**実数の組 (x, y, z) が必要である．われわれの空間は 3 次元である（図 1-7）．

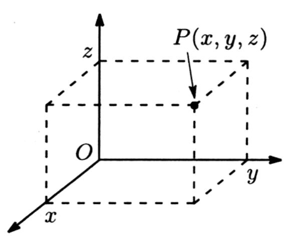


図 1-7

見慣れた次元は 1 次元，2 次元，3 次元までで，それ以上の 4 次元，5 次元，さらに一般の n 次元空間になると考えにくい．

しかし，理論的には，次元の範囲を 3 次元までに限る必要はなく，4 次元でも 5 次元でも，3 次元空間と同じくらいはっきりと考えることができる．4 次元以上の空間が考えにくいのは，“現実の空間” が

3次元だという偶然的な(?)事情によるのであろう.

4次元以上の空間というと，なにやら現実ばなれした空理空論のように思われがちだが，必ずしもそうではない．“現実の世界”を扱う物理学でも，たとえば相対性理論には4次元空間が出てくるし，量子力学には無限次元の空間が出てくる．一般次元の空間の性質を研究するのは，とにかくよいことなのである．一応そのことを信じて，先に進もう.

4次元空間の定義を述べよう.

定義　**4次元空間**とは，4個の実数の組 (x, y, z, w) の全体のなす空間のことである.

実数の3つ組 (x, y, z) をひとつ指定すると，3次元空間の1点 (x, y, z) が決まった．それと同様に，実数の4つ組 (x, y, z, w) を指定すると，4次元空間の1点 (x, y, z, w) が決まると考えるのである．4次元空間の点 P を

$$P = (x, y, z, w)$$

と書くことにする．(x, y, z, w) は点 P の**4次元座標**である.

たとえば，$(1, 3, 0, 4)$ は4次元空間の具体的な1点を表しており，また，$(0, 0, -2, \sqrt{3})$ は別の1点を表している．$(0, 0, 0, 0)$ で表される点 O を，4次元空間の**原点**とよぶ．（なお，ここで4次元空間とよんだものは，正確には4次元の**数空間**とよぶべきものである.)

もっと高い次元の空間を定義しようとするとき，これまでのように，第1座標，第2座標，第3座標，etc., $\cdots$ に x, y, z, etc., $\cdots$ の文字を使うのは不便である．そこで，これからは，第1，第2，第3座標，etc., $\cdots$ を x_1, x_2, x_3, etc., $\cdots$ という記号で統一的に表す

ことにする．点 P の 4 次元座標は (x_1, x_2, x_3, x_4) と書かれることになる．4 次元以上の空間，つまり 5 次元空間や 6 次元空間の定義も，4 次元空間の定義と同様である．5 次元，6 次元，etc., $\cdots$ の場合に同じような定義をいちいち繰り返すのは消耗なので，一般の n について n 次元空間を定義する．

定義　n をひとつの自然数とする．n **次元空間**とは，n 個の実数を並べた組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の全体のなす空間のことである．

こうしておけば，いままで述べてきた，直線，平面，3 次元空間，4 次元空間は，それぞれ $n = 1, 2, 3, 4$ という n 次元空間の特別な場合に相当することになる．直線は 1 次元空間，平面は 2 次元空間である．

n 次元空間のことを記号で

$$\mathbb{R}^n$$

と表すのが普通である．したがって，直線は $\mathbb{R}^1$，平面は $\mathbb{R}^2$，etc., $\cdots$ である．

こうして n 次元空間が定義されたが，n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の定義そのものは 3 次元までの座標の考えを単に形式的に n 次元まで拡張したものにすぎない．この定義を見ていても，4 次元空間と 3 次元空間の性質はどう違うか，というようなことは全然わからないし，n 次元も $(n+1)$ 次元もあまり変わりはないように思われる．

しかし，現在までのトポロジーの進歩によっていろいろな事実が明らかにされたが，それによると，空間の性質は次元が変わるごとに劇的といってよいほど変わるのである．約 100 年くらいのトポロジーの歴史のなかで，そのことに研究者は何度も驚かされてきた．こ

れからの話のなかで，このような事情が少しでも明らかにできれば幸いである．

2

偶数次元か，奇数次元か

●オイラー標数

次の事実はよく知られている．いま，ひとつの四面体をとる(図 2-1 を見てください)．

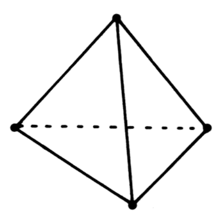


図 2-1

この四面体の頂点の個数は 4 である：(頂点の個数) = 4．また，図から明らかなように，辺の個数と面の個数はそれぞれ 6, 4 である：(辺の個数) = 6，(面の個数) = 4．そこで，

$$(\text{頂点の個数}) - (\text{辺の個数}) + (\text{面の個数})$$

という数を計算してみると，この場合 $4-6+4=2$，つまり，答えは 2 になる．

これは他の多面体についても同様で，たとえば六面体（サイコロ）について考えると(図 2-2)，頂点は 8 個，辺は 12 本，面は 6 面あるから，(頂点の個数) − (辺の個数) + (面の個数) = 8 − 12 + 6 = 2 となり，やはり答えは 2 である．さらに，正八面体，正十二面体，正二十面体についても，みな答えは 2 になることがわかる．

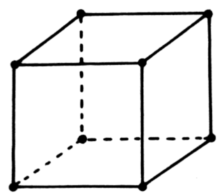


図 2-2

これらの多面体に共通する性質は，内部に空気を入れてふくらませてみるとどれも**球面**になってしまう，ということである．(ここで，図形を連続変形して考える，というトポロジー独特の方法を思いだしてください.）逆にいうと，これらの多面体はいずれも，球面をいくつかの頂点と辺と面とに分割して得られたものと考えられる．いま問題にしているのは，頂点や辺や面が何個あるかという数だけのことであるから，辺や面が多少曲がっていても本質的な違いはない．

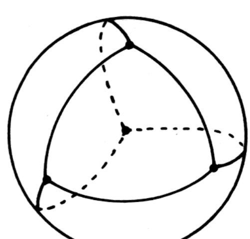
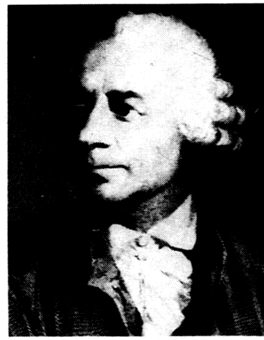


図 2-3　ふくらんだ四面体



オイラー

そこで，球面の上に直接，四面体や六面体のふくらんだ絵を描いて考えることができる(図 2-3 を見てください)．このような絵のことを，**球面の分割**とよぼう．

いままで考えてきたのは，球面の“正多面体への”分割だけであったが，18世紀の大数学者オイラー (L. Euler, 1707–83) は，球面をどのように分割しても同じ式が成立することを証明した．

オイラーの多面体定理　球面を分割して得られる多面体の頂点の数を α_0 個，辺の数を α_1 個，面の数を α_2 個とすると，

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

がなりたつ．

$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ という数は，球面を特定の方法で分割して計算した数であるにもかかわらず，得られる値 ($= 2$) は分割の仕方に依存しないというのである．したがって，この値は球面の性質を反映した，球面に固有の数であると考えられる．

一般に，ある図形 X を分割して，α_0 個の頂点，α_1 個の辺，α_2 個の面（三角形，四角形などの多角形であるような面）が得られたとき，$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ という数を計算してみると，この数は図形 X だけで決まり，X の分割の仕方に依存しないことが証明できる．この数 $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ のことを，図形 X の**オイラー標数**とよび，$e(X)$ と表すことにする．すなわち，

$$e(X) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2.$$

オイラーの定理は，e(球面)$= 2$ であることを主張しているわけである．

ついでにいろいろな曲面のオイラー標数を計算してみると，図 2-4 のようになる．読者は，これらの曲面を適当に分割して，この結果を（実験的に）確かめてみてください．

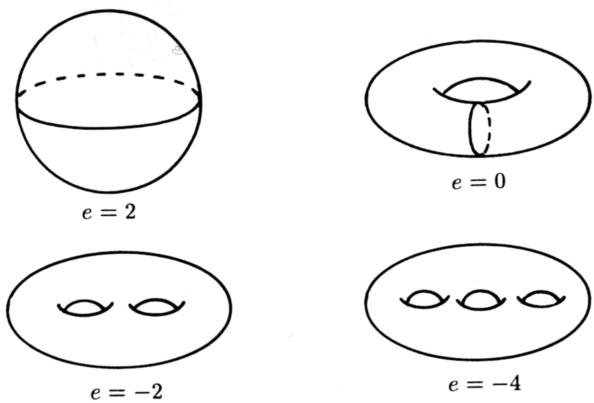


図 2-4

図 2-4 のオイラー標数の値をみると，球面の場合の $e = 2$ から始まって，“穴” のひとつあいた曲面（これを**トーラス**という）の場合の $e = 0$，以下，穴の数がひとつ増えるごとに e の値は 2 ずつ減っている．このことから，一般に p 個の穴のあいた曲面 X_p のオイラー標数 $e(X_p)$ は

$$e(X_p) = 2 - 2p$$

となることが予想される．実際にそれは正しい．p を曲面の**種数**（しゅすう）とよぶ．球面の種数は 0，トーラスの種数は 1 である．この式はオイラー標数と “曲面のかたち” との深いつながりを示している．

オイラー標数が考えられるのは，曲面のようなきれいな図形ばか

りではない．ここで，**グラフ**とよばれるもっと簡単な図形を考えてみよう．ここでいうグラフとは，棒グラフや折れ線グラフのグラフではなく，有限個の頂点と線分からなる連結な図形のことである．たとえば，図 2-5 がグラフの例である．

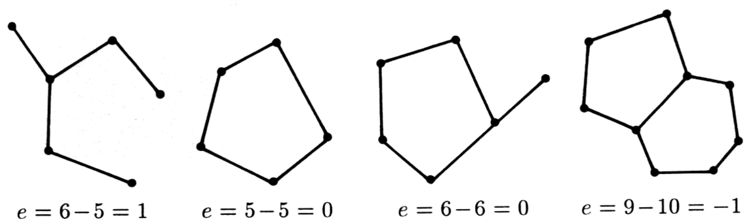


図 2-5

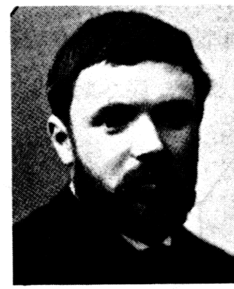
では，グラフについてオイラー標数を計算してみよう．グラフは頂点と線分だけから構成されているから，面の数 $\alpha_2 = 0$ であり，オイラー標数の式も $e = \alpha_0 - \alpha_1$ という簡単な式になる．もちろん，α_0 は頂点の個数，α_1 は線分の個数である．図 2-5 の各々のグラフについてオイラー標数を計算した結果が同じ図に書いてある．この値とグラフの絵とを見くらべて，どんなことがわかるだろうか．

容易に次のことがわかる．つまり，グラフのオイラー標数は，そのグラフに含まれる“閉じた回路”の個数に関係するということである．グラフに含まれる閉回路の個数を b とすると，

$$e = 1 - b$$

という関係がある．(図 2-5 でこのことを見てください.)　ここでも，オイラー標数は，グラフの図形的な特徴を適確に表すものになっている．

● 単体とオイラー標数



ポアンカレ

ポアンカレ (H. Poincaré, 1854–1912) は 1895 年の有名な論文 Analysis situs の中で，一般次元の多面体を定義し，そのような一般化された多面体にも適用できるオイラー標数の概念を定式化した.（もっとも，彼自身はオイラー標数という言葉や以下に述べる“単体”の概念は使っていない.）

2 次元と同様に一般の次元でも，図形を分割してオイラー標数を計算する. 2 次元の場合には，点，線分，面の集まりに図形を分割した．以後，面としては最も簡単な面，すなわち三角形のみを考える.

頂点，線分，三角形は，図形を分割する際の要素的な図形であった．一般次元の場合にも，これらに相当する要素的な図形がある.

まず，3 次元で考えてみよう.

3 次元的な図形であって，しかも三角形に似ているものは四面体である．正確には，中身のつまった四面体である．つまり，表面ばかりでなく，中身まで込めて考えるのである(図 2-6).

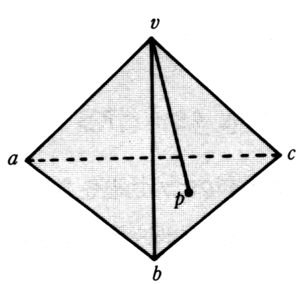


図 2-6　中身のつまった四面体

中身のつまった四面体が，3次元における“要素的な図形”である．

点，線分，三角形，四面体

という要素的な図形の系列は，次元をひとつずつ上げながらどこまでも続けられる．このような要素的図形に統一的な名前をつけておくのが便利なので，それらを**単体**とよぶことにする．n 次元の単体を簡単に **n-単体**という．たとえば，点は0-単体，線分は1-単体，三角形は2-単体，そして四面体は3-単体である．

次元をもうひとつ上げて，4次元の単体（4-単体）について考えてみよう．4-単体の図形的なイメージを描くには，まず，ひとつ前の次元の3-単体（四面体）が2-単体（三角形）からどのように構成されるか反省してみるとよい．図2-6を見ると明らかなように，四面体は v と書いた点を頂点として三角形 abc を底面とする**錐**（すい）（三角錐）になっている．つまり，底面をなす三角形 abc 上に動点 p をとるとき，頂点 v と p を結ぶ線分 vp の動きまわってできる3次元的な図形が，四面体（3-単体）である．そこで，4次元の単体を得るには，こんどは3次元の単体を底にする“錐”を考えればよさそうである．

ところで，図2-6において，三角形 abc 上の点 p と頂点 v を結ぶ線分 vp は，底面の三角形 abc とただ1点，すなわち点 p で交わっている．4次元の単体を構成するときには，3-単体（すなわち四面体 $abcd$）全部を“底”とするような“錐”を考えるのであるが，3-単体の外部にとった頂点 w と3-単体の内部の点 p を結ぶ線分 wp が（三角形 abc から四面体 v-abc をつくったときのように）“底”の四面体 $abcd$ と1点 p だけで交わるということがあるだろうか．

次ページの図2-7で見るように，線分 wp は3-単体 $abcd$ の内部

に入り込まねばならないから，3-単体 $abcd$ と線分 wp は，点 p だけでなく，点 p を含む短い線分 pq で交わるはずである．

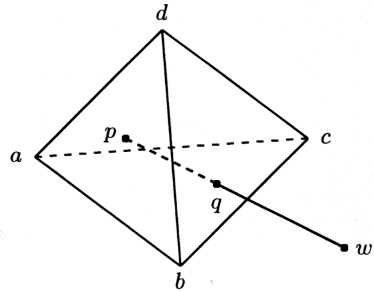


図 2-7

この疑問は，構成しようとする 4 次元の“錐”の頂点 w を，“底”の 3-単体 $abcd$ と同一の 3 次元空間の中にとってしまったことから生ずる錯覚である．三角形から錐 v-abc を構成するときにも，もし頂点 v を底面 abc と同一の平面上にとってしまったら，同じような不合理が起こったはずである（図 2-8 を見てください）．

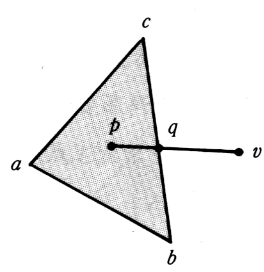


図 2-8

このような不合理を避けるために，三角錐の頂点 v は，三角形 abc の乗っている平面からはがして，その平面の上方にとったのである．

同様に，4 次元単体を構成するときも，頂点 w は，3-単体 $abcd$ の入っている 3 次元空間よりも，4 次元的な意味で少し“上方に”とっておかねばならない．

いま，4 次元空間 $\mathbb{R}^4$ の第 4 座標が 0 の部分空間，つまり $x_4 = 0$ で定義される部分空間を，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ と同一視しよう．この部分空間の点は，$(x_1, x_2, x_3, 0)$ という 4 次元座標をもつから，自然に $\mathbb{R}^3$ の点 (x_1, x_2, x_3) と同一視できる．

さて，4 次元単体を構成するために，底としての四面体 $abcd$ を，$x_4 = 0$ で定義される 3 次元空間の中にとっておく．錐の頂点 w は，第 4 座標が 0 でない任意の点をとる．たとえば，$w = (0,0,0,1)$ とする．

四面体 $abcd$ 内の任意の点を $p = (x_1, x_2, x_3, 0)$ とする．すると，線分 wp は，t をパラメーターとして

$$p_t = ((1-t)x_1,\ (1-t)x_2,\ (1-t)x_3,\ t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

で表されるような点 p_t の集合であると考えられる．実際，$t = 0$ のときは $p_0 = (x_1, x_2, x_3, 0)$ となり，p_t は点 p に一致し，$t = 1$ のときは $p_1 = (0,0,0,1)$ となり，p_t は点 w に一致する．t が 0 から 1 まで変化するにつれ，p_t は $\mathbb{R}^4$ の中を p から w まで“まっすぐに”動く．

線分 wp と四面体 $abcd$ との交わりを求めてみよう．四面体 $abcd$ は $x_4 = 0$ で決まる部分空間に入っているから，wp 上の点 p_t が $abcd$ と交わるためには，その第 4 座標は 0 でなければならない．p_t の第 4 座標は t であり，この t が 0 になるのは p_t が点 p に一致する場合に限る．したがって，線分 wp は，点 p だけで四面体 $abcd$ に交わっていることがわかる．

こうして動点 p が四面体 $abcd$ 内を動きまわるときの線分 wp の全体のつくる図形として，4 次元単体（4-単体）w-$abcd$ が構成できる(図 2-9)．

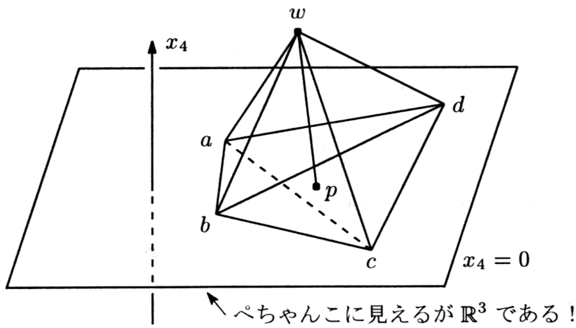


図 2-9

同様にして，4-単体を底とする錐として 5-単体が構成でき，5-単体を底とする錐として 6-単体が構成できる．一般に，$(n-1)$-単体から n-単体が構成できるわけである．

これで，n-単体が一応わかったことにしよう．

さて，n 次元空間の中の図形 X があり，それを有限個の単体の集まりに分割することができるとする．このような図形を（2 次元の場合を拡張して）**多面体**とよぶ．多面体 X を分割して，0-単体（頂点）が α_0 個，1-単体が α_1 個，2-単体が α_2 個，3-単体が α_3 個，$\cdots$，n-単体が α_n 個得られたとしよう．奇数次元に対応する数にはマイナス，偶数次元に対応する数にはプラスの符号をつけて α_i たちを加え合わせたもの，いわゆる**交代和**

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n \alpha_n$$

のことを，図形 X の**オイラー標数**とよび，記号 $e(X)$ で表すことに

する．2次元のときと同様に，この数は図形 X の分割の仕方によらずに定まることが証明できる．さらに，1章の言葉を使うと，

定理　オイラー標数 $e(X)$ は X の位相不変量である．

ということも証明できる．これは，連結成分の個数が位相不変であるという定理とは比較にならないほど重要な定理である．

● n 次元球面 S^n

通常の球面は，3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中で，原点 O からの距離が一定，たとえば1であるような点の全体のつくる図形である．集合論の記号では

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

で定義される図形が通常の球面である．（この記号は，“縦線の右側の条件 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ を満たす点 (x_1, x_2, x_3) の全体のなす集合”と読めばよい.）

通常の球面は一種の曲面であるから，その次元は2であると考えられる．3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の“立体図形”であるにもかかわらず，球面の次元は2なのである．球面のことを英語で sphere という．その頭文字 S と，次元2とを組み合わせて，

$$S^2$$

という記号で通常の球面を表す.

ちなみに，平面 $\mathbb{R}^2$ の単位円，つまり原点からの距離が1の円は

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

で定義される平面図形である．円は曲線の一種であるから，その次元は 1 であると考える．そして，円のことを **1 次元球面**といって，記号 S^1 で表すことにする．

では，一般の n について，n **次元球面** S^n はどのように定義されるだろうか．S^1, S^2 の定義を参考にすると，n 次元球面とは「$(n+1)$ 次元空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の中の原点からの距離が一定，たとえば 1 であるような点の全体のつくる図形」であると定義すればよさそうである．実際，そのように定義するのである．集合論の式で書くと，

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

である．S^n の次元は n であると考えられる．

これから，n 次元球面 S^n のオイラー標数 $e(S^n)$ を計算してみよう．

手はじめに，円 S^1 と通常の球面 S^2 をもう一度復習する．オイラー標数は位相不変な量なので，円 S^1 は三角形の周囲を変形して丸くしたものと考えてよく，球面 S^2 は四面体（3-単体）の表面をふくらませて丸くしたものと考えてよい．

三角形の周囲は，3 個の頂点と 3 個の辺（線分）からできている．このことから $e(S^1) = 3 - 3 = 0$ がわかる．S^1 のオイラー標数は 0 である．

3-単体の表面は，4 個の頂点，6 個の辺，4 個の三角形からできている．これから $e(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$ であった．

一般に，n **次元球面** S^n **は，**$(n+1)$**-単体の表面を“ふくらませて”丸くしたもの**と考えられる．図 2-10 がそのことを説明している．この図そのものは，四面体の表面と球面 S^2 の場合を描いているが，

一般次元の場合もこれと全く同じなので，図 2-10 がすでに $\mathbb{R}^{n+1}$ における様子を描いた図であると思って説明しよう．

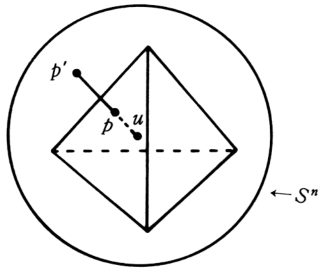


図 2-10　$\mathbb{R}^{n+1}$ における絵

$(n+1)$-単体の内部に 1 点 u をとる．そして，$(n+1)$-単体の表面の任意の点 p と u を結ぶ．線分 up を延長して，u を中心とする半径の十分大きな球面 S^n との交点を求め，それを p' とする．球面 S^n は u からの距離が一定（たとえば 1）であるような点の集まりであったから，半直線 up は S^n とただ 1 点 p' で交わるのである．（p' は半直線 up 上で u からの距離がちょうど定められた半径になる点である.）また，このような半直線 up が $(n+1)$-単体の表面と点 p だけで交わることは，前の図 2-9 と同様の考えで示される．

$(n+1)$-単体の表面上の各点 p を，半直線 up にそって p' まで動かすことによって，S^n が $(n+1)$-単体をふくらませたものであることがわかる．

したがって，オイラー標数 $e(S^n)$ は $(n+1)$-単体の表面を分割して計算すればよい．

一般に，k 次元単体には何個の頂点があるだろうか．

1-単体（線分）は 2 個，

2-単体（三角形）は 3 個，

3-単体（四面体）は4個，

の頂点をそれぞれ含んでいる．これから，**k-単体は $(k+1)$ 個の頂点があること**になりそうである．これを証明しよう．

数学的帰納法による．$k=1,2,3$ の場合には，上でみたように正しい．そこで，$(k-1)$-単体が k 個の頂点を含むと仮定して，k-単体が $(k+1)$ 個の頂点を含むことを証明しよう．しかし，これは簡単である．なぜなら，k-単体は $(k-1)$-単体を底とする錐として構成された．錐を構成するとき，新たに頂点を1つつけ加えた．よって，$(k-1)$-単体が k 個の頂点を含めば，k-単体にはひとつ多く $(k+1)$ 個の頂点があるはずである．（証明終わり）

さて，$(n+1)$-単体の表面の分割にもどる．

$(n+1)$-単体には，いま証明したように，$(n+2)$ 個の頂点がある．そして，$(n+1)$-単体に含まれる k-単体は，これらの $(n+2)$ 個の頂点のうちのどれかの $(k+1)$ 個の頂点を頂点とする k-単体になっている．そしてじつは，$(n+2)$ 個の頂点のどの $(k+1)$ 個の頂点を選びだしても，その $(k+1)$ 個の頂点を頂点とする k-単体があることが示される．これから，

補題　$(n+1)$-単体に含まれる k-単体の個数 α_k は，$(n+2)$ 個の頂点から $(k+1)$ 個の頂点を選びだす仕方の数に等しい．

ということがわかる．

これは，よく知られた**組み合わせ**の数である．一般に，m 個のものから l 個のものを選びだす仕方の数を $\binom{m}{l}$ と書く．具体的には

$$\binom{m}{l} = \frac{m!}{l!\,(m-l)!}$$

であることがわかっている．ここで $m!$ は m の**階乗**，すなわち $m! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (m-1) \times m$ を表している．たとえば

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{(1\times 2) \times (1\times 2)} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

である．

上の補題によって，$(n+1)$-単体に含まれる k-単体の個数 α_k は $\alpha_k = \binom{n+2}{k+1}$ となる．

われわれは，$(n+1)$-単体の表面の分割を考えているが，$(n+1)$-単体に含まれる n 次元以下の k-単体はすべて表面に含まれており，表面は n 次元以下の単体の集まりに分割されていることが証明できる．したがって，$(n+1)$-単体の表面のオイラー標数は，α_0 から α_n までの交代和を考えればよい：

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^k \alpha_k + \cdots + (-1)^n \alpha_n = \binom{n+2}{1} - \binom{n+2}{2} + \cdots + (-1)^k \binom{n+2}{k+1} + \cdots + (-1)^n \binom{n+2}{n+1}.$$

この式の右辺をもっと簡単にするため，**2項展開**の公式を思いだそう．次の一連の公式である．

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \qquad (\text{係数}：1, 2, 1),$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \qquad (\text{係数}：1, 3, 3, 1),$$

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \qquad (\text{係数}：1, 4, 6, 4, 1),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

ここに現れる係数，たとえば $(1+x)^3$ のときの 1, 3, 3, 1 は組み合わせの数の列

$$\binom{3}{0},\ \binom{3}{1},\ \binom{3}{2},\ \binom{3}{3}$$

に等しく，$(1+x)^4$ のときの 1, 4, 6, 4, 1 は

$$\binom{4}{0},\quad \binom{4}{1},\quad \binom{4}{2},\quad \binom{4}{3},\quad \binom{4}{4}$$

に等しい．($\binom{m}{l}$ の計算式を使って確かめてください．ただし $\binom{m}{0}=1$ とします.)

一般に，$(1+x)^m$ の展開式の係数は

$$\binom{m}{0},\quad \binom{m}{1},\quad \binom{m}{2},\quad \cdots,\quad \binom{m}{k},\quad \cdots,\quad \binom{m}{m}$$

となる．したがって，$(1+x)^m$ の展開の一般式は

$$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{k}x^k + \cdots + \binom{m}{m}x^m$$

となるのである．(これを**2項定理**という.)

オイラー標数の計算に利用するため，$m=n+2$ とおいて，$(1+x)^{n+2}$ の展開を考えると

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} = \binom{n+2}{0} &+ \binom{n+2}{1}x + \binom{n+2}{2}x^2 + \cdots \\ &+ \binom{n+2}{k}x^k + \binom{n+2}{k+1}x^{k+1} + \cdots \\ &+ \binom{n+2}{n+1}x^{n+1} + \binom{n+2}{n+2}x^{n+2}\end{aligned}$$

となる．両辺を x で割ると

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)^{n+2}}{x} = \binom{n+2}{0}\frac{1}{x} &+ \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2}x + \cdots \\ &+ \binom{n+2}{k}x^{k-1} + \binom{n+2}{k+1}x^k + \cdots \\ &+ \binom{n+2}{n+1}x^n + \binom{n+2}{n+2}x^{n+1}.\end{aligned}$$

この式に $x=-1$ を代入すると 左辺 $=0$ であり，右辺は

$$-\binom{n+2}{0}+\binom{n+2}{1}-\binom{n+2}{2}+\cdots$$
$$+(-1)^{k-1}\binom{n+2}{k}+(-1)^k\binom{n+2}{k+1}+\cdots$$
$$+(-1)^n\binom{n+2}{n+1}+(-1)^{n+1}\binom{n+2}{n+2}$$

である．これの最初の項と最後の項を除いたものは，われわれの求めようとしている $(n+1)$ -単体の表面のオイラー標数に等しい．よって，

$$0=-\binom{n+2}{0}+\{(n+1)\text{-単体の表面のオイラー標数}\}$$
$$+(-1)^{n+1}\binom{n+2}{n+2}$$

という式を得た．

$\binom{n+2}{0}=1$, $\binom{n+2}{n+2}=1$ という既知の値を代入し，さらに，前に説明したように，$(n+1)$ -単体の表面のオイラー標数が n 次元球面のオイラー標数 $e(S^n)$ にほかならないことを考えると，上の式は

$$0=-1+e(S^n)+(-1)^{n+1}$$

となる．移項して

$$e(S^n)=1+(-1)^n$$

を得る．

試しに，既知の場合をこの式で計算すると，$e(S^1)=1+(-1)=0$, $e(S^2)=1+(-1)^2=1+1=2$ となってうまく合っている．

こうして，n 次元球面 S^n のオイラー標数が計算できた．

定理　$e(S^n)=1+(-1)^n$.

$e(S^n)$ の値を $e(S^1), e(S^2), e(S^3), e(S^4), \ldots$ と並べてみると

$$0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ \ldots$$

という数列が得られる．球面のオイラー標数は，奇数次元では 0，偶数次元では 2 である．

このように，オイラー標数を通してみた球面の性質は，次元が奇数か偶数かによってきれいに規則的に変化している．

空間の性質が奇数次元，偶数次元で変化していくのは，単にオイラー標数という数のうえの話だけでなく，そこにはもっと深い幾何学的な事情があるのである．このことをあとの章でみることにする．

注意　上では，m 個のものから l 個のものを選びだす仕方の数（組み合わせの数）を $\binom{m}{l}$ と書いたが，${}_m\mathrm{C}_l$ と書く流儀もある．

3

独立した空間

これまで，球面 S^n を $(n+1)$ 次元空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の中の図形と考えてきた．しかし，現代的な幾何学では，球面 S^n を図形としてではなく，それ自身独立した1個の空間としてとり扱うことが多い．通常の球面 S^2 や曲面も，$\mathbb{R}^3$ の中の立体図形というよりもむしろ，それぞれに独立した2次元の空間とみなすのである．（もっとも，それらは，平面 $\mathbb{R}^2$ のようにどこまでも広がった空間ではなく，いわば，手のひらに乗るような，小さく閉じた2次元空間であるが.）

n 次元においても，これまでのように $\mathbb{R}^n$ だけを n 次元空間と考えることをやめて，$\mathbb{R}^n$ の他にもそれ自身独立した n 次元空間（たとえば S^n）がいろいろあると考えることにする．

現在，“独立した n 次元空間” は **n 次元多様体**として定式化されている．現在の幾何学は，この多様体をめぐって展開しているのである．

なお，$\mathbb{R}^n$ を他の n 次元空間から区別して，これからは **n 次元数空間**とよぶ．これは，$\mathbb{R}^n$ が実数の n 組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の全体として定義されたからである．

● 多様体とは

多様体の定義を述べよう．ある空間 M が n **次元多様体**であるとは，次の 2 つの条件 (1)，(2) がなりたつことである．

条件 (1)　M のどんな点 p についても，p のまわりの n 次元座標系が M の中に描けて，p の近くの点の位置はこの座標系によって記述できる．(図 3-1 は 2 次元多様体の場合.)

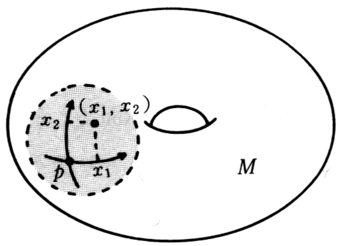


図 3-1

p のまわりに描いた座標系は空間 M 全体にも通用するとは限らないので，これを**局所座標系**とよぶ．図 3-1 の局所座標系は灰色部分で役立つ座標系である．

条件 (1) は，M のどんな点のまわりにも n 次元の局所座標系が存在するという条件である．

条件 (2)　2 つの局所座標系が重なり合う部分では，それらの間の座標変換が何回でも微分可能である(図 3-2)．

図 3-2 の灰色部分では，点の位置がひとつの局所座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で記述されると同時に，他の局所座標 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ でも記述される．したがって，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ がひとつ決まるごとに点 p が決まり，それに応じて $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ が決まるわけだから，$y_1, y_2, \ldots, y_n$

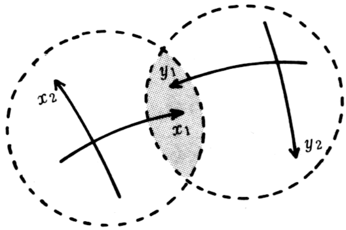


図 3-2

はそれぞれ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の関数となる：

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

もちろん，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は局所座標であるから，各変数 x_i がすべての実数値をとりうるわけではない．それぞれに決まったある範囲の実数値しか動かないのが普通である．しかし，その範囲を x_i たちが動きまわるとき，上記の n 個の関数 $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は x_i たちについて何回でも微分可能であるというのである．これが条件 (2) の内容である．

条件 (1), (2) を満たす空間 M が n 次元多様体である．これで多様体の定義は終わりである．

次に，簡単な多様体の例をあげてみよう．

例 1） n **次元数空間** $\mathbb{R}^n$．$\mathbb{R}^n$ には全体に標準的な座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が決まっている．この座標をどの点についても，そのまわりの局所座標系と解釈すれば，条件 (1) が満たされる．また，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

からそれ自身 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ への "変換" は明らかに何回でも微分できるので，条件 (2) も満たされる．$\mathbb{R}^n$ は n 次元多様体である．

例 2）曲面は 2 次元多様体である．

例 3）S^n は n 次元多様体である． S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の中の図形として次の式で定義された：

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

S^n のかってな点 p は，$(n+1)$ 個の座標 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ をもっているが，いうまでもなくこれは $\mathbb{R}^{n+1}$ の座標であって，S^n 上の点 p の局所座標系としては，$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ のうちのひとつは余分である．たとえば，点 $p = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ の近くで $x_{n+1} > 0$ であったとする．点 p のまわりの S^n の点だけに注目すると，x_{n+1} は 1 番目から n 番目までの座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で決まってしまう．つまり

$$x_{n+1} = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$$

で決まる．よって，$x_{n+1} > 0$ の範囲では，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ だけで S^n の点の位置が指定できるので，これが n 次元の局所座標系と考えられる．

同様に $x_{n+1} < 0$ の範囲でも，x_{n+1} は残りの $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ によって

$$x_{n+1} = -\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$$

の式で決まる．ここでも x_{n+1} は余分で，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が S^n の局所座標系になる．

$x_1 > 0$ の範囲では，同じ理由で，x_1 を除いた $(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ が S^n の局所座標系である．

$x_{n+1} > 0$ と $x_1 > 0$ の両方がなりたつ所では，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と $(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ の 2 組の局所座標系が考えられる．この範囲で，第 1 の局所座標が $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ であるような S^n 上の点については，$x_{n+1} = \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$ がなりたつ．よって，その点の第 2 の局所座標 $(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ は，第 1 の局所座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を用いて

$$x_2 = x_2, \quad \ldots, \quad x_n = x_n,$$
$$x_{n+1} = \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$$

と計算できる．これが，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ から $(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ への座標変換の式である．これらの式は，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 < 1$ の範囲で何回でも微分できる．

同じことがどの局所座標系の間の変換についてもいえるから，S^n は n 次元多様体であることがわかった．

● 多様体の直積

m 次元多様体 M^m と n 次元多様体 N^n から，$(m+n)$ 次元の**直積**とよばれる多様体

$$M^m \times N^n$$

をつくることができる（M^m の肩の m は次元を表す）．

$M^m \times N^n$ は，M^m の点 p と N^n の点 q との対 (p, q) の全体である．ひとつの対 (p, q) が，$M^m \times N^n$ の 1 点と考えられるわけである．

$M^m \times N^n$ の局所座標系の入れ方を説明しよう．$M^m \times N^n$ の 1 点 $P = (p, q)$ のまわりの局所座標系を考えればよい．それには，点 p のまわりの M^m の局所座標系 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ と，点 q のまわりの

N^n の局所座標系 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ をとり，それらを並べたもの

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

を点 $P=(p,q)$ のまわりの $M^m \times N^n$ の局所座標系とする．

たとえば，円周 S^1 は 1 次元多様体であるが，S^1 と S^1 の直積 $S^1 \times S^1$ は 2 次元多様体となり，実質的にトーラスと同じものである（図 3-3 を見てください）．

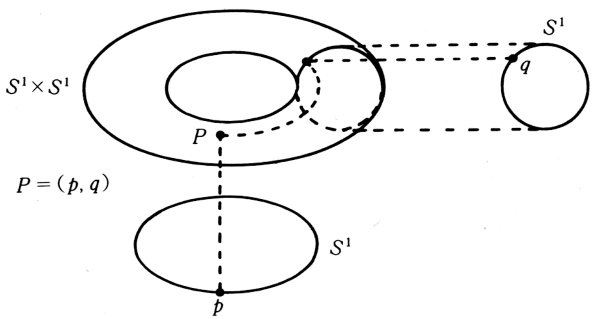


図 3-3

● 多様体の代数的トポロジー

代数的トポロジーは，図形や空間のさまざまな不変量をとり扱う．これまで，位相不変量として，連結成分の個数とオイラー標数が登場した．ここで，もうひとつの大切な不変量，**ベッチ数**について説明しよう．（19 世紀の数学者ベッチ（E. Betti, 1823–92）にちなんだ名前である.）

ベッチ数はひとつの系列をなしていて，k を 0 以上の整数とすると，第 k ベッチ数 b_k という位相不変量が決まるのである．

じつは，連結成分の個数は 0 番目のベッチ数 b_0 にほかならない．したがって，空間 X が連結ならば $b_0(X) = 1$ であり，２つの連結成分をもてば $b_0(X) = 2$ である．第 0 ベッチ数はやさしい．

第 1 ベッチ数 b_1 は少し説明がいる．まず，グラフの場合を考えてみる．グラフは 2 章でも考えたが，頂点と線分とからなる連結な図形であった．図 3-4 に 3 つのグラフが描かれているが，これらのグラフの第 1 ベッチ数 b_1 は，左からそれぞれ $b_1 = 0, b_1 = 1, b_1 = 2$ である．つまり，グラフの第 1 ベッチ数 b_1 とは，そのグラフに含まれる“閉回路”（ぐるっとまわる閉じた路，サイクル）の個数を表しているのである．もう少し厳密にいうと，“互いに独立なサイクルの個数”が第 1 ベッチ数である．

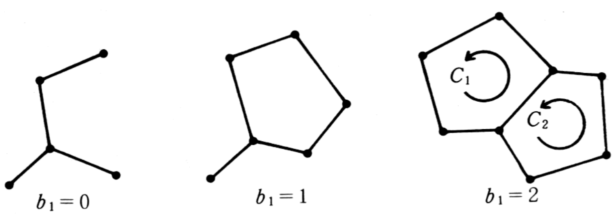


図 3-4

図 3-4 の右端のグラフには，２つのサイクル C_1 と C_2 がある．しかし，よく考えてみると，このグラフに含まれるサイクルは C_1 と C_2 だけでなく，C_1 と C_2 を両方まわるサイクルもあれば，C_1 を 2 回まわって C_2 を反対にまわるサイクルもある．このようなサイクルをそれぞれ

$$C_1 + C_2, \quad 2C_1 - C_2$$

と書くことにする．なお，ここで，ベッチ数を考えるときは C_1 と C_2 をまわる順序は問題にしない，ということを注意しておく．C_1

をまわったあと C_2 をまわるサイクルも，C_2 をまわったあと C_1 をまわるサイクルも，両方とも C_1+C_2 と書くのである．（基本群のことをご存じの読者なら，まわる順序をやかましくいう基本群の考え方と，この点で違っていることに気づかれると思う．）このように約束しておくと，このグラフの中のすべてのサイクルは，C_1 と C_2 という“基本サイクル”から合成され，一般式 mC_1+nC_2 で書けることがわかる(ここに，m, n は整数)．**グラフの第 1 ベッチ数とは，それに含まれる基本サイクルの個数のことである．**

グラフ以外の図形についても，本質的には変わりがない．図形 X の第 1 ベッチ数 $b_1(X)$ は，X の中の基本サイクルの個数である．トーラスを例にとって説明しよう．

トーラスを T^2 と書く．T^2 の上には，いくらでも閉じた道を描くことができるから，基本サイクルもたくさんありそうに思えるが，じつは基本サイクルは 2 つしかない．トーラスをタテに一周するサイクル C_1 と，ヨコに一周するサイクル C_2 である(図 3-5 を見てください)．

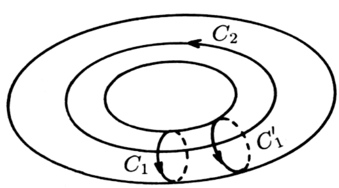


図 3-5

C_1 と平行にタテに一周するサイクル C_1' は，C_1 を少しずらしたものにすぎないから，C_1 と本質的に同じサイクルと思うことにする．また，C_2 と平行にヨコに一周するサイクル C_2' も，C_2 と同じと思うことにする．このように，ずらして一致するサイクルは同じサイ

クルとみなすのである．こうすれば，基本サイクルは C_1 と C_2 で十分である．

トーラス T^2 は，正方形 $abcd$ の対辺 ab と dc，bc と ad をそれぞれ同一視して得られる(図 3-6)．

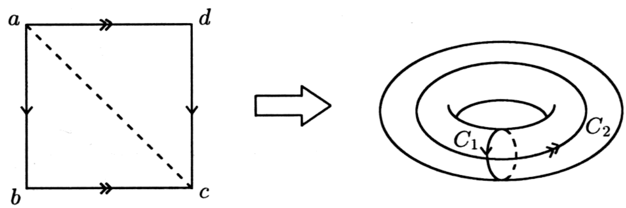


図 3-6

辺 ab と dc は同一視されて，T^2 上のサイクル C_1 となり，辺 bc と ad は同一視されて，T^2 上のサイクル C_2 となる．

正方形 $abcd$ の対角線 ac は，トーラス上では両端の a と c が同一視されて閉じた回路 C をつくる．このサイクル C は C_1 と C_2 でどのように書けるだろうか．次ページの図 3-7 で見るように，正方形 $abcd$ 上で対角線を少しずつ動かしていって，$ab+bc$ に重ねることができる．この動きをトーラス上で考えれば，明らかに，いま問題にしたサイクル C が C_1+C_2 で書けることがわかる．

T^2 上の他のどんなサイクル C についても同様で，それは，整数 m, n を適当に選んで mC_1+nC_2 の形に書けるのである．

結局，トーラス T^2 には 2 個の基本サイクル C_1, C_2 があり，第 1 ベッチ数は 2 である： $b_1(T^2)=2$.

球面 S^2 ではどうだろうか．S^2 上では，どんな閉回路も少しずつ変形していくと 1 点に縮んでしまう．つまり，S^2 上にはサイクルが全然ないと考えられる．S^2 の第 1 ベッチ数は 0 である：$b_1(S^2)=0$.

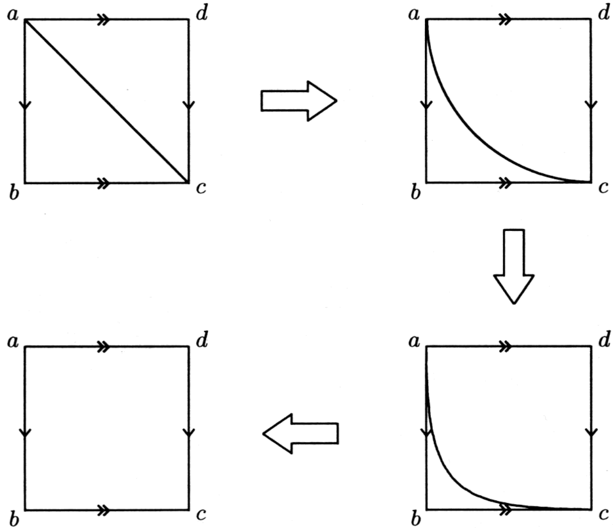


図 3-7

他の曲面，一般に p 個の“穴”のあいた曲面 X_p の第1ベッチ数は $2p$ であることが知られている： $b_1(X_p)=2p$.

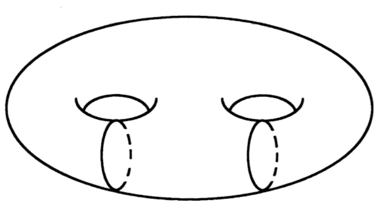


図 3-8 X_2 の図

これらの結果を表にしておこう.

曲面	S^2	T^2	X_p（p 個の“穴”のある曲面）
b_1	0	2	$2p$

2 次元以上の球面 S^n の第 1 ベッチ数は 0 である： $b_1(S^n) = 0$ $(n \geq 2)$.

さて，第 1 ベッチ数までは比較的わかりやすかったが，第 2 ベッチ数を直観的に説明しようとすると，読者にかなり想像力を働かせてもらう必要がある.

まず，“**2 次元のサイクル**” なるものを考えなくてはならない．いままでのサイクルは，いわば “1 次元のサイクル” であった．つまり，自分自身で閉じた曲線が 1 次元のサイクルだった．2 次元のサイクルは，自分自身で閉じた 2 次元の曲面（のようなもの）である．空間 X の中に，このような 2 次元サイクルの集合を考え，その中から基本的な 2 次元サイクルを選びだす．$C_1, C_2, \ldots, C_r$ がそれであるとする．そして，他の 2 次元サイクルは，$m_1, m_2, \ldots, m_r$ を整数として

$$m_1C_1 + m_2C_2 + \cdots + m_rC_r$$

という和の形で（ひと通りに）表されるとする．このとき，X の第 2 ベッチ数 $b_2(X)$ は r であると定義するのである．つまり，**第 2 ベッチ数 $b_2(X)$ とは，X に含まれる 2 次元の基本サイクルの個数のことである.**

第 3 以上のベッチ数も全く同様に定義される．“k 次元サイクル” とは，自分自身で閉じた k 次元の多様体のようなものと思う．そして，空間 X に含まれる k 次元サイクルの中から，基本的な k 次元サイクルを選びだす．このような k 次元の基本サイクルの個数が，X の**第 k ベッチ数** $b_k(X)$ である.

X をひとつの図形または空間とすると，ベッチ数の系列

$$b_0(X),\ b_1(X),\ b_2(X),\ \ldots$$

が定まる．X が多面体のとき，そこに含まれる最高次元の単体が n 次元であるとすると(このことを，X の次元は n である，という)，$(n+1)$ 番目以上のベッチ数は全部 0 になることがわかっている．X の次元が n ならば，

$$b_0(X),\ b_1(X),\ \ldots,\ b_n(X)$$

というベッチ数の有限列が定まるのである．

ポアンカレは前掲の論文の最後で，このベッチ数の交代和

$$b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) - \cdots + (-1)^n b_n(X)$$

を計算すると，それが X のオイラー標数に等しくなることを注意した．これが今日，オイラー - ポアンカレの公式とよばれている公式である．

オイラー - ポアンカレの公式

$$e(X) = b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) - \cdots + (-1)^n b_n(X).$$

この公式を p 個の “穴” のあいた曲面 X_p について確かめてみよう．2 章で述べたように，$e(X_p) = 2 - 2p$ である．ベッチ数の方はどうなるだろうか．X_p は連結である．したがって $b_0(X_p) = 1$．また前々ページの表から，$b_1(X_p) = 2p$．最後に，X_p の第 2 ベッチ数 $b_2(X_p)$ は，X_p の中の “2 次元サイクル” を考えることによって計算できるが，曲面 X_p それ自身がひとつの 2 次元サイクルをなしており，これが基本的な 2 次元サイクルである．X_p には 1 個の基本的な 2 次元サイクルがあるわけである．よって，$b_2(X_p) = 1$．（X_p は 2 次元だから，第 3 ベッチ数以上は 0.） 結局，$b_0(X_p) = 1$，$b_1(X_p) = 2p$，$b_2(X_p) = 1$ を得た．この交代和をつくると，

$$b_0(X_p) - b_1(X_p) + b_2(X_p) = 1 - 2p + 1$$

となって，オイラー標数 $e(X_p) = 2 - 2p$ と一致している．

2 次元以上の一般次元球面 S^n について考えてみる．S^n は連結であるから，$b_0(S^n) = 1$．また，$1 \leq k \leq n-1$ ならば第 k ベッチ数は 0 であることが知られている．よって，$b_k(S^n) = 0$ $(1 \leq k \leq n-1)$．そして，自分自身が n 次元サイクルをなしているから，$b_n(S^n) = 1$．

結局，ベッチ数の系列は，1, 0, 0, ..., 0, 1 となる．この交代和をつくると $1 + (-1)^n$ となって，やはり前に計算しておいたオイラー標数 $e(S^n) = 1 + (-1)^n$ と一致している．

これで，オイラー - ポアンカレの公式が実験的に確かめられたが，上の実験で使ったベッチ数の系列をもう一度ながめてみよう．

曲面 X_p では：　1, $2p$, 1,

n 次元球面 S^n では：　1, 0, 0, ..., 0, 1

となっている．つまり，左右対称な数列になっているのである．

ここで，曲面 X_p も n 次元球面も "閉じた" 多様体であったことを思いだそう．ポアンカレは（またまたポアンカレである！），このようなベッチ数の対称性が一般の閉じた多様体について成立することを証明した．今日，ポアンカレ双対定理とよばれる定理である．

ポアンカレ双対定理　M^n を閉じた向きづけ可能な n 次元多様体とすると，第 k ベッチ数 $b_k(M^n)$ は第 $(n-k)$ ベッチ数 $b_{n-k}(M^n)$ に等しい：

$$b_k(M^n) = b_{n-k}(M^n).$$

（ここで，多様体が向きづけ可能であるということが出てきましたが，これについては，次の 4 章で説明します.）

ポアンカレ双対定理を，3次元の閉じた向きづけ可能な多様体 M^3 に適用してみると，$b_0(M^3) = b_3(M^3)$，$b_1(M^3) = b_2(M^3)$ を得る．このことと，オイラー-ポアンカレの公式を合わせて，

$$\begin{aligned} e(M^3) &= b_0(M^3) - b_1(M^3) + b_2(M^3) - b_3(M^3) \\ &= b_0(M^3) - b_1(M^3) + b_1(M^3) - b_0(M^3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

がでる．つまり，3次元の閉じた向きづけ可能多様体 M^3 のオイラー標数は0になるのである．

読者は，5次元の多様体について同様の考察をしてみてほしい．やはりオイラー標数が0になることがわかると思う．一般に，

系　奇数次元の，閉じた向きづけ可能な多様体 M のオイラー標数は0である．

ということが，全く同様にして証明できる．

2章で，奇数次元の球面のオイラー標数が0であることをみたが，それは，いま説明した事実の特別な場合だったのである．

4

次元が 4 の倍数かどうか

4 の倍数次元の多様体には，特別な理論的役割がある．この章で，そのことを説明しよう．

図 4-1 の曲面 M 上に，2 つのサイクル C, C' が描いてある．少し複雑な曲線であるが，C と C' は 2 点 p_1 と p_2 で交わっていることがわかる．しかも，この交わりはどちらも**横断的**である．横断的な交わりというのは，互いに接するような交わり方ではない，ということである．

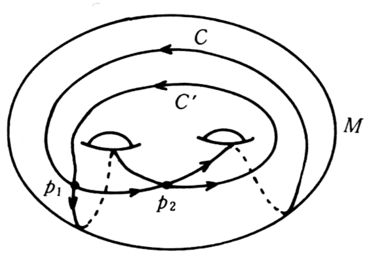
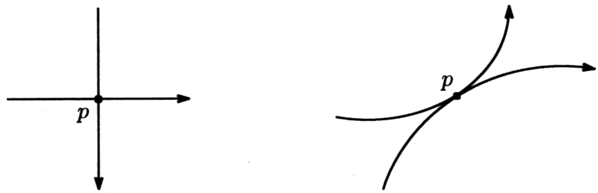


図 4-1

図 4-2 の (a) は横断的な交わり，(b) は横断的でない交わりである．

この章では，サイクル同士の交わりをもう少し数量化して考えてみる．そのなかで，4 の倍数次元の多様体の特別な性質が明らかになってくると思う．

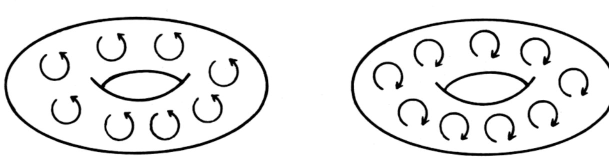


(a) 横断的である　　(b) 横断的でない

図 4-2

● 曲面の向きと交わりの符号

サイクル同士の交わりを数量化する第一歩は，交点における**交わりの符号**というものを定義することである．そのためには，曲面 M に**向き**を与えなければならない．曲面の向きとは何か，をきちんと述べるには少し準備がいるので，ここでは簡単に，図 4-3 のような曲面上に描かれた丸い矢印のことと思っておく．図 4-3 はトーラスの“向き”を描いたものであるが，(a) と (b) の丸い矢印はそれぞれのトーラスに互いに反対の向きを与えていると考える．



(a)　　(b)

図 4-3

ここで大切なことは，丸い矢印は曲面全体でいっせいに同じ向きにそろっていなければならないことである．図 4-3 のようにいっせいに同じ向きにそろった丸い矢印が描かれたとき，その曲面は**向き**

づけられた曲面であるといい，その矢印の絵のことをその曲面に与えた**向き**という．ただし，すべての曲面が向きづけられるわけではない．図 4-4 は有名なメビウスの帯であるが，この曲面上にいっせいに同じ向きにそろった丸い矢印を描くことはできない．

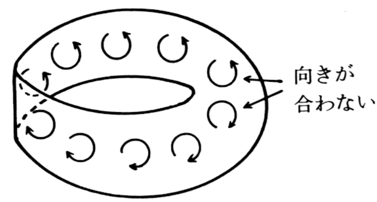


図 4-4

いっせいに向きのつけられる曲面を**向きづけ可能**といい，そうでない曲面を**向きづけ不可能**という．球面やトーラス，一般に p 個の"穴"のある曲面 X_p（図 2-4）は向きづけ可能であり，メビウスの帯は向きづけ不可能である．

これで一応，曲面の向きがわかったものとしよう．

次に，**交わりの符号**というものを説明する．向きづけられた曲面 M があり，その上に 2 つのサイクル C, C' が描かれているとする．図 4-1 のように，C と C' は横断的に交わっているとしよう．このとき，各交点において"交わりの符号"を考えるのである．

次ページの図 4-5 は，図 4-1 の交点 p_1 のまわりの様子を拡大したものである．交点 p_1 の右上に丸い矢印が描いてあるが，これが M の向きだと思うことにする．

交点 p_1 における交わりの符号を定義するのであるが，これは正確には"交点 p_1 において，C から C' に向かう交わりの符号"とよぶべきものである．それは，次のように定義される．

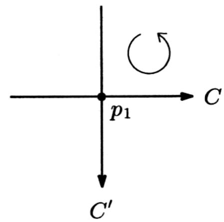


図 4-5

点 p_1 において C と C' は 90° の角度で交わっているとしてよい．(もしそうでなければ，C または C' を少しずらして 90° で交わるようにする.) このとき，交点 p_1 を中心として，C を表す矢印を 90° 回転させると C' を表す矢印に重なるが，この回転の向きが，あらかじめ曲面 M に与えておいた向きと一致するかどうかをみるのである．それが一致すれば交わりの符号を $+1$，一致しなければ交わりの符号を -1 と定義する．

図 4-5 ではどうなっているだろうか．M に与えられた向きは，図中の丸い矢印のように，時計と反対まわりになっている．ところが，交点 p_1 を中心として C を 90° 回転して C' に重ねるには，時計と同じ方向に回転させなければならない．これは M に指定された向きと一致しない．したがって，

$$(\text{交点 } p_1 \text{ における}, C \text{ から } C' \text{ へ向かう交わりの符号}) = -1$$

である．この式の左辺を，$\varepsilon(p_1; C, C')$ と書くことにする．すると，上の式は簡単に

$$\varepsilon(p_1; C, C') = -1$$

となる．

いまは，C から C' へ向かう交わりの符号を考えた．同じ図 4-5 において，こんどは C' から C へ向かう交わりの符号を考えてみよう．すると，交点 p_1 を中心に C' を 90° 回転させて C に重ねるには，その回転の向きは時計と反対向きにしなければならない(図 4-5 を見てください)．この向きは，あらかじめ曲面 M に与えておいた向きと一致する．したがって，こんどは

$$\varepsilon(p_1; C', C) = +1$$

を得る．$\varepsilon(p_1;\quad)$ の中で C と C' の並べる順序を入れかえると，交わりの符号が逆転することがわかる．

図 4-1 のもうひとつの交点 p_2 で同じ考察をしてみてほしい．ただし，M の向きは，図 4-5 に描いた丸い矢印を（曲面 M の上をすべらせて）交点 p_2 の近くにもっていったものを，p_2 のまわりの向きと考えるのである．

次の結果が得られるはずである：

$$\varepsilon(p_2; C, C') = -1, \quad \varepsilon(p_2; C', C) = +1.$$

つまり，p_2 においても，C から C' に向かう交わりの符号は -1，反対に C' から C に向かう交わりの符号は $+1$ になっている．

練習のため，別の状況を考えてみる．図 4-6 を見てください．これは，ある曲面の一部を描いたものである．

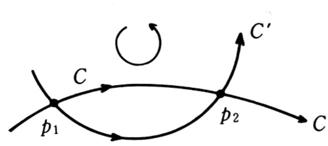


図 4-6

曲面の向きは，ここでも反時計まわりに与えてある(図中の丸い矢印)．この状況では

$$\varepsilon(p_1;C,C')=-1,\quad \varepsilon(p_2;C,C')=+1$$

となっている．このように，$\varepsilon(\quad)$ の中での C と C' の順序を固定しておいても，交点の場所によって交わりの符号はいろいろである．(なお，C と C' の順序を入れかえると，p_1 においても p_2 においても符号は逆になる．つまり，p_1 においては $\varepsilon(p_1;C',C)=+1$，p_2 においては $\varepsilon(p_2;C',C)=-1$ となる．図 4-6 を見て確かめてください.)

● 交点数

図 4-1 をもう一度，図 4-7 として描いておく．ここでも M の向きは，図の小さな丸い矢印のように反時計まわりに与えることにする．“交わりの符号” を使って，サイクル C とサイクル C' の**交点数**（記号で $C\cdot C'$ と書く）を定義しよう．C と C' は図 4-7 のように，どこでも横断的に交わっていると仮定する．

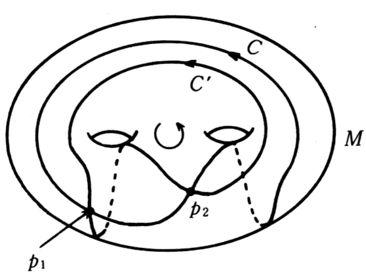


図 4-7

定義　$p_1,p_2,\ldots,p_r$ が C と C' の交点のとき，**交点数** $C\cdot C'$ とは

$$C\cdot C'=\varepsilon(p_1;C,C')+\varepsilon(p_2;C,C')+\cdots+\varepsilon(p_r;C,C')$$

で決まる数のことである．

つまり，$C \cdot C'$ は，C と C' のすべての交点の交わりの符号を加えたものである．ここでも，C と C' の順序が大切で，C を左に書いた交点数 $C \cdot C'$ を求めるときは，各交点 p_i において C から C' に向かう交わりの符号 $\varepsilon(p_i; C, C')$ を使い，反対に C' を左に書いた交点数 $C' \cdot C$ を求めるときは，各交点で C' から C に向かう交わりの符号 $\varepsilon(p_i; C', C)$ を使うのである．

図4-7での C と C' の交点数を求めてみよう．C と C' は2点 p_1 と p_2 で交わり，前にみておいたように，各々の交点における交わりの符号は

$$\varepsilon(p_1; C, C') = -1, \quad \varepsilon(p_2; C, C') = -1$$

であった．したがって，この2つを加えて $C \cdot C' = -2$ を得る．もちろん，C と C' の順序を入れかえると $C' \cdot C = +2$ となる．

交点数の重要な性質は，次の分配法則である．

交点数の分配法則　(1)　$C \cdot (C' + C'') = C \cdot C' + C \cdot C''$

(2)　$(C' + C'') \cdot C = C' \cdot C + C'' \cdot C$

C と $C'+C''$ の交点数は C と C' の交点数と C と C'' の交点数を加え合わせればよい，というのは直観的には明らかである．また，厳密な証明といっても，このことと大して違わない．

分配法則の便利な点は，基本サイクルについてさえ交点数を計算しておけば，他のサイクルの交点数はそれから求まることである．

基本サイクルについて復習しておくと，曲面 M 上のサイクル $C_1, C_2, \ldots, C_r$ が基本サイクルであるとは，M 上の他のどんなサイクル C も，$C = m_1 C_1 + m_2 C_2 + \cdots + m_r C_r$ とひと通りに書き

表されることであった(ここで $m_1, m_2, \ldots, m_r$ は整数である).

注意　前にはっきり言っておかなかったが，高次元の多様体まで含めてサイクルの理論を考えると，**有限位数のサイクル**が現れることがある．これは，それ自身では 0 でないサイクル C であって，それを何倍かすると 0 になる，すなわち $mC=0$ という自然数 m (>0) があるようなサイクルである．ここでは，簡単に，有限位数のサイクルは現れない場合に限って議論を進めている．

図 4-7 の曲面 M の基本サイクルは 4 つあり，図 4-8 にそれらが図示してある．(基本サイクルの取り方はひと通りとは限らない．図 4-8 以外にも，いろいろの取り方がある.)

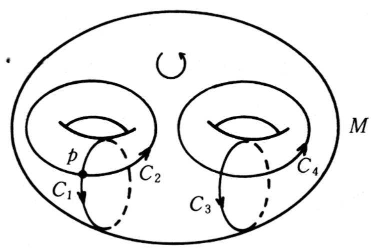


図 4-8

図で見るように，C_1 と C_2 は 1 点で交わり，その交点 p において C_1 から C_2 に向かう交わりの符号 $\varepsilon(p;C_1,C_2)$ は $+1$ である：$\varepsilon(p;C_1,C_2)=+1$．したがって，

$$C_1 \cdot C_2 = 1$$

である．(また，これから $C_2 \cdot C_1 = -1$ がわかる.)　同様に C_3 と C_4 も 1 点で交わり，そこでの符号を考えて

$$C_3 \cdot C_4 = 1 \quad (C_4 \cdot C_3 = -1)$$

を得る．一方，C_1 と C_3，C_1 と C_4 は交わらないから，$C_1 \cdot C_3 = 0$, $C_1 \cdot C_4 = 0$．同様に，$C_2 \cdot C_3 = 0$, $C_2 \cdot C_4 = 0$ である．

C_1 とそれ自身 C_1 との交点数 $C_1 \cdot C_1$ はどう考えればよいだろうか．C_1 を図 4-8 の曲面の上で少し右に平行にずらすと，自分自身からはずれてしまう．つまり，C_1 と C_1 の交わりは（ずらしたあとは）0 になってしまう．このことから

$$C_1 \cdot C_1 = 0$$

であると考える．同様な考えから，$C_2 \cdot C_2 = 0, C_3 \cdot C_3 = 0, C_4 \cdot C_4 = 0$ を得る．

基本サイクルの間の交点数は，下のような表にまとめると便利である．この表を基本サイクル $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ に関する**交点行列**とよぶ．この行列の中で，たとえば $C_1 \cdot C_2$ $(= 1)$ の値は，いちばん上の横に並んだ第 1 行の左から 2 番目（これを 1 行 2 列の位置という）に書く．また，たとえば $C_1 \cdot C_4$ $(= 0)$ の値は，第 1 行の左から 4 番目（1 行 4 列）に書く．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

交点行列が計算できると，他のサイクルの間の交点数は分配法則を使って求まる．このことを，図 4-7（＝図 4-1）のサイクル C と C' の交点数について示そう．

まず，C と C' が基本サイクルでどう書けるかを考えてみよう．図 4-9 に，曲面 M 上のサイクル C だけを取り出して（しかも少し変形して）描いてある．

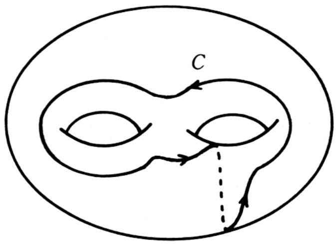


図 4-9

この絵と図 4-8 の基本サイクルの絵を見くらべてほしい．すると，C は基本サイクルによって

$$C = C_2 - C_3 + C_4$$

と書けることがみてとれると思う．同じようにして，C' は基本サイクルによって

$$C' = C_1 + C_2 + C_4$$

と書ける．これから，分配法則を使って（多項式のように）展開すれば

$$\begin{aligned}
C \cdot C' &= (C_2 - C_3 + C_4) \cdot (C_1 + C_2 + C_4) \\
&= C_2 \cdot (C_1 + C_2 + C_4) - C_3 \cdot (C_1 + C_2 + C_4) \\
&\quad + C_4 \cdot (C_1 + C_2 + C_4) \\
&= C_2 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_4 - C_3 \cdot C_1 - C_3 \cdot C_2 - C_3 \cdot C_4 \\
&\quad + C_4 \cdot C_1 + C_4 \cdot C_2 + C_4 \cdot C_4
\end{aligned}$$

$$= (-1) + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 + 0 + 0 + 0$$
$$= -2$$

となり，前と同じ結果が得られる．

もっと複雑なサイクルの場合も，計算法は全く同じである．

● 偶数次元への拡張

曲面上のサイクルの交点数は，n 次元多様体の中の k 次元サイクル C と $(n-k)$ 次元サイクル C' との交点数 $C \cdot C'$ に一般化できる．もし，n が偶数で $n = 2k$ であれば，$n - k = k$ であるから，2つの k 次元サイクルの間の交点数 $C \cdot C'$ が考えられることになる．ここでは，そのような状況を考えてみよう．

M^{2k} の中に2つの k 次元サイクル C, C' があって，それらが有限個の交点で**横断的に**交わっているとしよう．曲面上のサイクルの場合と違って，$2k$ 次元の空間の中で2つの k 次元サイクルが横断的に交わる様子は想像しにくいかもしれないが，座標を使って書くとわかりやすい．

C と C' の交点のひとつを p とし，p を原点とする M^{2k} の局所座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2k})$ を適当にとって，この交点の近くで，C という k 次元サイクルが，$x_{k+1} = \cdots = x_{2k} = 0$ で定義される（前半分の）k 次元空間 $\{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)\}$ と一致し，C' の方は $x_1 = \cdots = x_k = 0$ で定義される（後半分の）k 次元空間 $\{(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)\}$ と一致するようにできるとき，C と C' は p で**横断的に交わる**ということにする．

次ページの図 4-10 はその様子を図示したつもりだが，曲面上の曲

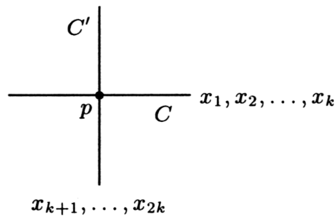


図 4-10

線の絵とあまり変わらないものになってしまった．

なお，p の近くでは C と C' の交わりは交点 p だけである．これはよく考えてみると面白いことで，$2k$ 次元空間の中では，k 次元空間と k 次元空間がただ 1 点で横断的に交わるのである．特に $k=2$ とおくと，4 次元空間の中では，平面と平面がただ1点で横断的に交わるのである．(われわれの 3 次元空間では，2 平面は平行であるか，あるいは，交わるとすると直線にそって交わるしかない.)

さて，k 次元サイクルの交わりの場合にも，交わりの符号が定義できる．

しかし，曲面の場合と同様に，その前に，一般次元の多様体にも**向きづけ**の意味をはっきりさせておかなければならない．こんどは，丸い矢印を描くわけにはいかないので，少し "理論的な" 定義になる．

定義　n 次元多様体 M の 1 点 p のまわりの**向き**とは，その点を原点とする局所座標系 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の並べ方のことである．ただし，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の間で偶数回の入れかえをおこなったものは同じ向きを定めると規約し，奇数回の入れかえをおこなったものは反対の向きを定めると規約する．

曲面にもどって考えるのが，いちばんわかりやすい．上の定義によれば，2次元の場合 (x_1, x_2) と (x_2, x_1) は反対の向きを定めることになるが，図4-11のように，(x_1, x_2)，(x_2, x_1) という並べ方はそれぞれ，x_1 から x_2 に向かう，あるいは x_2 から x_1 に向かう，丸い矢印を指定していると思えばよい．

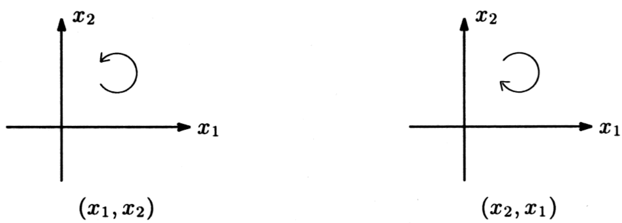


図 4-11

多様体 M の各点でいっせいに同じ“向き”が指定されているとき，M は**向きづけられている**という．曲面のときと同様に，向きづけ可能な多様体と向きづけ不可能な多様体が区別される．(これでようやく，3章のポアンカレ双対定理の仮定に出てきた“向きづけ可能な多様体”の説明ができた.)

さて，M^{2k} の中で，2つの k 次元サイクル C, C' が横断的に交わっている，という状況にもどる．M^{2k} も C も C' も，すべて向きが与えられているとする．C と C' の交点のひとつ p において，“C から C' に向かう交わりの符号” $\varepsilon(p; C, C')$ なるものを定義しよう．

C は向きづけられているから，交点 p において，C の局所座標の並べ方 $(x_1, \ldots, x_k)$ が指定されている．同様に，C' は向きづけられているから，やはり，p において C' の局所座標の並べ方 $(y_1, \ldots, y_k)$ が指定されている．そして，p は C と C' の横断的な交点であるか

ら，この２つの局所座標を合わせたもの

$$(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$$

は，全体の M^{2k} の（p における）局所座標になっている．こうして得られた局所座標 $(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$ が，あらかじめ指定されている M^{2k} の向き（つまり局所座標の並べ方）と一致した並べ方になっていれば $\varepsilon(p;C,C')=+1$，一致しない並べ方になっていれば $\varepsilon(p;C,C')=-1$ とおくのである．

さて，ここで大切な考察をする．それは，C と C' の順序を逆にしたときどうなるか，ということである．曲面の場合（M^{2k} の $k=1$ のとき）は C と C' を逆にすると交わりの符号は逆転した：$\varepsilon(p;C,C')=-\varepsilon(p;C',C)$．しかし，一般の場合は，逆転しないこともあるのである．

C と C' の順序を入れかえたとき，p において，C' の局所座標 $(y_1,\ldots,y_k)$ と C の局所座標 $(x_1,\ldots,x_k)$ を，この順に並べたもの

$$(y_1,\ldots,y_k,x_1,\ldots,x_k)$$

が，M^{2k} に指定された向きと一致するかどうかをみて，交わりの符号を求めるわけである．これと，前の $(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$ の場合を比較しよう．

補題　$(y_1,\ldots,y_k,x_1,\ldots,x_k)$ という並べ方は，$y_1,\ldots,y_k,x_1,\ldots,x_k$ の間の k 回の入れかえによって $(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$ に変えられる．

（証明）$(y_1,\ldots,y_k,x_1,\ldots,x_k)$ の中の y_1 を x_1 と入れかえる．そのあと y_2 と x_2 を入れかえる．そのあと y_3 と x_3 を入れかえる．

$\ldots$. 最後に y_k と x_k を入れかえる．この k 回の入れかえによって，$(y_1,\ldots,y_k,x_1,\ldots,x_k)$ は $(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$ に変わる．

（証明終わり）

座標の入れかえを奇数回おこなってうつり合う並べ方は反対の“向き”を定義し，偶数回おこなってうつり合う並べ方は同じ“向き”を定義すると約束しておいた．

上の補題から，$(y_1,\ldots,y_k,x_1,\ldots,x_k)$ は k 回の入れかえで $(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$ にうつる．したがって，$(y_1,\ldots,y_k,x_1,\ldots,x_k)$ **の定める“向き”と** $(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$ **の定める“向き”は，k が奇数なら反対であり，k が偶数なら同じである**．

これを交わりの符号 $\varepsilon(p;C,C')$ の言葉でいえば，次のようになる：k が奇数なら $\varepsilon(p;C,C')=-\varepsilon(p;C',C)$ であり，k が偶数なら $\varepsilon(p;C,C')=\varepsilon(p;C',C)$．すなわち，ひとつの式で表すと

$$\varepsilon(p;C,C')=(-1)^k\varepsilon(p;C',C)$$

となる．

曲面上のサイクルの場合と同様に，交点数 $C\cdot C'$ を次のように定義する．

定義　$p_1,p_2,\ldots,p_r$ を C と C' の交点とするとき，**交点数** $C\cdot C'$ とは

$$C\cdot C'=\varepsilon(p_1;C,C')+\varepsilon(p_2;C,C')+\cdots+\varepsilon(p_r;C,C')$$

で決まる数のことである．

この場合も，**分配法則**：$C\cdot(C'+C'')=C\cdot C'+C\cdot C''$ および $(C'+C'')\cdot C=C'\cdot C+C''\cdot C$，が成立する．そして，$C$ と C' を

入れかえたとき，次がなりたつ(これは，交点における交わりの符号についていえたことから明らかである)：

$$C \cdot C' = (-1)^k C' \cdot C \quad (C, C' : k \text{ 次元}).$$

曲面で $C \cdot C' = -C' \cdot C$ であったのは，$k = 1$ の特別な場合だったのである．

いま，全体の多様体 M^{2k} の次元は $2k$ としている．したがって，k が偶数 $(= 2l)$ のとき，その次元 $2k$ は $4l$，つまり 4 の倍数になる．k が偶数なら，上の式から $C \cdot C' = C' \cdot C$ であるから，これで次の定理が示された．

定理　M^{2k} が 4 の倍数次元なら，k 次元サイクル同士の交点数 $C \cdot C'$ は C と C' に関して対称である： $C \cdot C' = C' \cdot C$.

この一見なんでもない事実が，4 の倍数次元多様体に特別の理論的な役目を負わせることになるのである．(次の 5 章で，もっと詳しく述べる.)

● ベクトル場に関するホップの定理

交点数を使って，ベクトル場に関するホップの定理を証明することができる．

前置きとして予備的な考察をしよう．k 次元球面の直積 $S^k \times S^k$ を考えてみよう(3 章参照)．前に，$k = 1$ の場合 $S^1 \times S^1$ はトーラスと同じものであることをみたが(図 3-3)，一般の k の場合も図は同じようなものである(図 4-12 を見てください)．

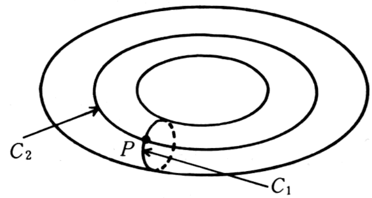


図 4-12　$M^{2k}=S^k\times S^k$

$S^k\times S^k$ の左側の S^k のかってな 1 点 p を固定したとき，$S^k\times S^k$ の部分空間 $\{p\}\times S^k$ は S^k と同じ形の k 次元サイクル C_1 と思える．また，$S^k\times S^k$ の右側の S^k のかってな 1 点 q を固定すると，$S^k\times\{q\}$ はもうひとつの k 次元サイクル C_2 と思える．C_1 と C_2 とは，(p,q) という対の表す 1 点 P で（横断的に）交わっている．$M^{2k}=S^k\times S^k$ とおく．M^{2k} の向きを適当に定めれば，

$$C_1\cdot C_2=1$$

とすることができる．前節の考察により，C_1 と C_2 を入れかえれば $C_2\cdot C_1=(-1)^k$ である．

C_1,C_2 をそれぞれ少しずつずらすと，C_1 は C_1 自身からはずれ，C_2 は C_2 自身からはずれる．これから，$C_1\cdot C_1=0, C_2\cdot C_2=0$ を得る．

じつは，$\{C_1,C_2\}$ が $M^{2k}=S^k\times S^k$ の k 次元の基本サイクルになっている．$\{C_1,C_2\}$ に関する交点行列は，上の考察から

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

$S^k\times S^k$ の**対角線** Δ を考えてみよう．これは，S^k の点 p をそれ

自身と並べてつくった対 (p,p) を，S^k 上のいろいろな点 p について考えた全体である．

たとえば，簡単な場合として，通常の xy 平面の $\{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ で定義される正方形 $abcd$ を考える（図 4-13 を見てください）．正方形は，x 軸の単位区間［0,1］と y 軸の単位区間［0,1］の直積 $[0,1] \times [0,1]$ と考えられる．そして，$y = x$ のグラフ（をこの正方形の中に制限したもの）は，明らかに (x,x) という対の全体であるから，対角線 ac になっている．

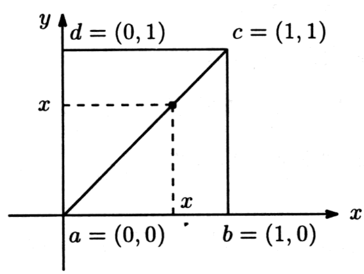


図 4-13

$S^k \times S^k$ の中でも同様に，“対角線” $\varDelta$ を，$\varDelta = \{(p,p)\,|\,p \in S^k\}$ によって定義するのである．

この対角線 $\varDelta$ は，それ自身としては k 次元球面 S^k と同じ形である．それが $S^k \times S^k$ の中に傾いて入っている．$\varDelta$ は $S^k \times S^k$ の k 次元サイクルと考えられるが，それは基本サイクル C_1 と C_2 でどのように書けるだろうか．じつは

$$\varDelta = C_1 + C_2$$

と表せるのである．（その理由は，3 章の図 3-7 で示したのとだいたい同じである．）C_1 と C_2 の間の交点数はすでにわかっているから，

Δ のそれ自身との交点数 $\Delta\cdot\Delta$ が（分配法則を使って）計算できる．すなわち

$$\begin{aligned}\Delta\cdot\Delta &= (C_1+C_2)\cdot(C_1+C_2)\\ &= C_1\cdot C_1 + C_1\cdot C_2 + C_2\cdot C_1 + C_2\cdot C_2\\ &= 0+1+(-1)^k+0\\ &= 1+(-1)^k.\end{aligned}$$

この結果にはどこかで見覚えがあると思う．もちろんそれは，2 章で計算したように，k 次元球面のオイラー標数 $e(S^k)$ にほかならない．こうして，次の定理がわかった．

定理　直積 $S^k\times S^k$ の対角線 Δ の自己交点数 $\Delta\cdot\Delta$ は，S^k のオイラー標数 $e(S^k)$ に等しい： $\Delta\cdot\Delta=e(S^k)$.

この定理は，一般の向きづけられた閉じた k 次元多様体 M^k にも拡張できる．次の定理がなりたつのである．

定理　直積 $M^k\times M^k$ の対角線 Δ の自己交点数 $\Delta\cdot\Delta$ は，M^k のオイラー標数 $e(M^k)$ に等しい： $\Delta\cdot\Delta=e(M^k)$.

以上を前置きにして，ベクトル場に関するホップの定理を説明しよう．

多様体 M^k の**ベクトル場** X とは，M^k の各点に矢印を描き，その矢印の向きと長さが，点の位置に連続的に依存するようにしたものである．長さ 0 の矢印を描いてもかまわない．長さ 0 の矢印の描かれた点を，そのベクトル場 X の**特異点**という．図 4-14 には，2 次元の球面 S^2 とトーラス T^2 の上のベクトル場が描いてある．球面上のベクトル場には特異点が現れており，トーラス上にはない．

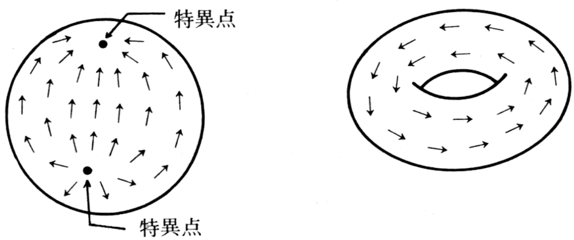


図 4-14

じつは，**2 次元球面 S^2 上には，特異点のないベクトル場は描けない**のである．これはホップの定理の特別な場合である．S^2 のオイラー標数は 2 であるが，一般に次の定理がなりたつ．(“本当の” ホップの定理は，もっと一般的である.)

ホップの定理　M^k を閉じた向きづけ可能な k 次元多様体とする．$e(M^k) \neq 0$ であれば，M^k のベクトル場には必ず特異点がある．

(証明)　X を M^k のベクトル場とする．M^k の各点 p に，その点を根もととして描かれた矢印の先端 q を対応させることによって，連続的な対応

$$f : M^k \longrightarrow M^k$$

が得られる(図 4-15)．

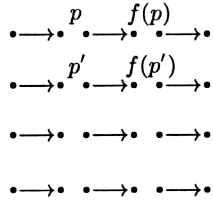


図 4-15

つまり，ベクトル場 X にそって M^k の点 p を動かす写像が $f: M^k \to M^k$ である．もし p がベクトル場 X の特異点ならば，そこでの矢印の長さは0だから p は動かない．すなわち $f(p)=p$ となっている．

さて，$f: M^k \to M^k$ の**グラフ** Γ を直積 $M^k \times M^k$ の中で考えよう．Γ は，M^k の各点 p について p と $f(p)$ の対 $(p, f(p))$ をつくったものの全体である：

$$\Gamma = \{(p, f(p)) \mid p \in M^k\}.$$

(xy 平面上で，関数 $y=f(x)$ のグラフが，対 $(x, f(x))$ で表される点の全体であることと同じである.)

M^k の点 p にそれ自身 p を対応させる対応 $M^k \to M^k$ のことを**恒等写像**という．上と同様に，直積 $M^k \times M^k$ の中につくった恒等写像のグラフが，対角線 Δ にほかならない．

$f: M^k \to M^k$ はベクトル場 X にそって点 p をもとの位置から動かしたものだから，そのグラフ Γ は，直積 $M^k \times M^k$ の中で恒等写像のグラフ Δ を少しずらしたものである．したがって，k 次元サイクルとしては $\Delta = \Gamma$ と考えてよい(少しずらしても，サイクルとしては同じものと考えるのだった)．よって，交点数について

$$\Delta \cdot \Delta = \Delta \cdot \Gamma$$

がなりたつ．

ところで，$\Delta \cdot \Delta = e(M^k)$ であった．一方，もしベクトル場 X に特異点がなければ，M^k 上のすべての点 p について $f(p) \neq p$ であり，したがって $(p, f(p)) \neq (p, p)$ であるから，点 $(p, f(p))$ は対角

線 Δ 上にない．いいかえれば，f のグラフ Γ は対角線 Δ と交わらない．交点数の言葉では $\Delta \cdot \Gamma = 0$ である．

こうして，X に特異点がなければ，$e(M^k) = \Delta \cdot \Delta = \Delta \cdot \Gamma = 0$ であることがわかった．同じことを対偶をとっていうと，$e(M^k) \neq 0$ ならば X には必ず特異点があることになる．これがホップの定理である．（証明終わり）

偶数次元球面のオイラー標数は 2 であったから，

系　偶数次元球面 S^{2k} 上には，特異点のないベクトル場は存在しない．

一方，別の方法で，次の事実が証明できる．

命題　奇数次元球面 S^{2k+1} 上には，特異点のないベクトル場が少なくともひとつ存在する．

奇数次元，偶数次元の球面の性質のあざやかな対比がここにある．

5

高次元と低次元

1940～50年代までに，代数的トポロジーは大いに発展した．その成果のうえにたって，1950～60年代には，多様体の微分トポロジーという新しい分野が花開いた．

微分トポロジーは，多様体に関して多くの新しい事実を明らかにした．実際，それまで想像もされなかった数々の現象が発見され，それに関連する多くの予想や問題が生みだされた．微分トポロジーの流れは今日まで続いており，現在も活発に研究されている．

大きく分けて，1950～60年代は高次元多様体（5次元以上）の研究が主流であった時期，70年代以降は低次元多様体（3次元と4次元）に大きな関心がもたれるようになった時期と言える．

この5章では，高次元と低次元の微分トポロジーから，それぞれひとつずつ話題を選んで紹介する．高次元の代表的結果として，エキゾチック球面について説明しよう．これは一見奇妙であるが，高次元には普遍的な存在と考えられるものである．次に，低次元の話題から，ドナルドソンの定理を紹介する．これは，4次元多様体の特異性を際立たせる重要な定理である．

● エキゾチック球面

1956 年，J. ミルナーは，通常の 7 次元球面 S^7 と異なる 7 次元“球面”が存在する，という驚くべき発見をした．今日，このような“球面”はエキゾチック球面とよばれている．エキゾチック球面はミルナー以後，7 次元以上において次々に発見され，60 年代の初めには，各次元で何個存在するかという個数までわかってしまった．たとえば，7 次元には（通常の球面 S^7 も加えて数えると）28 個のエキゾチック球面が存在する．7 次元より低い 1, 2, 3, 5, 6 の各次元には，エキゾチック球面は存在しない．見慣れた球面（通常の S^n, $n = 1, 2, 3, 5, 6$）しかない．残念ながら，われわれは，エキゾチック球面を実際に見るわけにはいかないのである．

1, 2, 3, 5, 6 からは 4 次元が抜けているが，4 次元のエキゾチック球面が存在するかどうかはわかっていない．未解決の難問である．

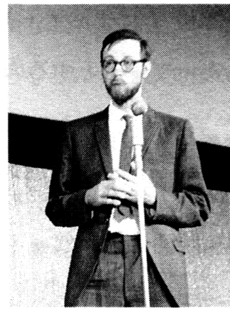
1 章で，トポロジーは図形の性質のうちで，曲げたり伸ばしたりの連続変形を施しても変わらないようなものを研究する，と言った．そして，そのような性質を位相不変な性質とよんだ．エキゾチック球面を説明するには，位相不変ということをここでもっと厳密に定式化しておく必要がある．

2 つの空間 X と Y があるとしよう．そして，X の各点 x に Y のある点 y を対応させる写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

が与えられているとする．この写像は 1 対 1 であるとする．つまり，$x_1 \neq x_2$ であるときはいつでも $f(x_1) \neq f(x_2)$ であるとする（X の異なる 2 点が Y の同一点に対応することはない）．さらに，f は

ミルナー（J. W. Milnor, 1931– ）


1962 年の国際数学者会議（ストックホルム）で講演するミルナー．（服部晶夫先生のご好意による.）

プリンストン大学の結び目理論の大家フォックス (R. H. Fox) の弟子．稀代の秀才で，フォックスの出した「結び目の全曲率」に関する問題を鮮やかに解いて，最初の論文をアナルス・オブ・マセマティックスに発表したのが 19 歳のとき．また，7 次元のエキゾチック球面を発見し論文を発表したのが 25 歳のとき．その業績によって 1962 年のフィールズ賞を受けたのが 31 歳のときだった．

モース理論，h-コボルディズム理論，特性類，複素超曲面の特異点，K 理論，など多くの教科書を書いた．そのどれもが名著である．説明は平易かつ完璧でわかりやすい．

童顔で，太ってはいないが長身，大柄な人で，靴の大きさは 30 センチくらいはあったような気がする．

ミルナーの秀才ぶりを伝えるエピソードに，学生が「こんな問題を考えたいが，どうでしょうか」と相談に行くと，少し考えて，「それはこうすれば解けるよ」と解いてしまうか，「それにはこんな反例があるよ」と，解決不可能であることを教えてくれるかどちらかなので，博士論文を書くための指導教員としては適していなかった，という噂話がある．筆者がアメリカに滞在していた 1976,7 年の冬のこと，面会の約束をとっておいた日に大雪が降り，自然にキャンセルと思いきや，ずっと待っていてくれたことを知って，大変恐縮した思い出がある．

“上へ”の写像であるとする．つまり，Y のどの点 y をとっても，そこに X のある点 x がうつってきているとする(Y の任意の点 y について，$y = f(x)$ となる X の点 x が存在する)．ひとことで言えば，写像 f によって，X の点と Y の点がひとつずつ，残りなく対応しあっているとするのである．

定義　上のような $f : X \to Y$ によって，点 x と点 y が $y = f(x)$ と対応しているとき，x が連続的に動けば y も連続的に動き，逆に y が連続的に動けば x も連続的に動くなら，f は**同相写像**であるという．

要するに，2つの空間 X と Y の間の同相写像 $f : X \to Y$ とは，X の点と Y の点をひとつずつ残りなく，しかも連続的に対応させる写像のことである(図 5-1 を見てください)．

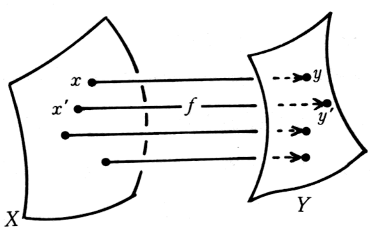


図 5-1　同相写像

1章で，“曲げたり伸ばしたりの連続変形を施して，図形 X を図形 Y に変形するとき $\cdots$” というような言い方をしたが，そこで本当に言いたかったのは，“X から Y への同相写像 $f : X \to Y$ が存在するとき $\cdots$” ということだったのである．

X から Y への同相写像 $f : X \to Y$ があるとき，X と Y は**位相同**

形であるという．１章で説明した“位相不変な性質”とは，厳密にいえば，位相同形な図形（または空間）に共通な性質のことである．

空間 X, Y が多様体のときは，同相写像よりもっと強い**微分同相写像**の概念が定義できる．次に，これを説明しよう．

M を多様体とする．多様体は単に空間であるというだけではなく，“なめらかな”空間である．そして，多様体 M から多様体 N への写像 $f: M \to N$ がなめらかであるとはどういうことかが定義できるのである．

$f: M \to N$ を与えられた連続写像としよう．p を M のかってな点とし，p のまわりで M の局所座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ を考える．また，p を f でうつした点 $f(p)$ のまわりで N の局所座標 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を考える．

p の近くの点 $p' = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ を f でうつすと，$f(p)$ の近くの点 $f(p') = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ にうつるが，このとき，$y_1, y_2, \ldots, y_n$ のひとつひとつは，$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ を変数とする多変数の実数値関数になっている．各々の y_i が，$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ を変数とする関数として何回でも微分可能のとき，$f: M \to N$ は p のまわりでなめらかである，という．３章の初めに述べた多様体の定義の条件 (2) により，f が p のまわりでなめらかであるかどうかは，局所座標系 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の取り方によらない．そして，M のどんな点のまわりでも f がなめらかであるとき，単に，$f: M \to N$ はなめらかな写像である，ということにする．

定義　２つの多様体 M と N の間の同相写像 $f: M \to N$ が**微分同相写像**であるとは，f が M から N へのなめらかな写像であり，同時に f の逆写像 $f^{-1}: N \to M$ も N から M へのなめらかな写像で

あることをいう.

多様体 M と N の間に微分同相写像 $f : M \to N$ があるとき，M と N は**微分同相**であるということにする.

M と N が微分同相なら，それらはもちろん位相同形である．しかし，逆はなりたつだろうか．M と N が位相同形なとき，M と N が微分同相といえるだろうか.

同相写像 $f : M \to N$ があるとしても，この f 自身は微分同相写像であるとは限らない．しかし，f とは別になんらかの微分同相写像 $g : M \to N$ を構成して，M と N が微分同相になることが証明できないだろうか.

ミルナーが発見したのは，それができないことを示す最初の例であった.

ミルナーの定理　次の 2 性質 (1), (2) を同時にもつ 7 次元多様体 Σ^7 が存在する！

(1)　Σ^7 は 7 次元球面 S^7 と位相同形である.

(2)　Σ^7 は 7 次元球面 S^7 と微分同相にならない.

同相写像の観点からは，Σ^7 と S^7 とは区別がつかない(性質 (1))．しかし，なめらかな多様体としては，Σ^7 と S^7 は全く違う (性質 (2)) というのである.

Σ^7 と S^7 とは，その上のなめらかさの構造（これを**微分構造**という）が全く異なる．このような Σ^7 が**エキゾチック球面**である.

こうして，同相写像で不変な性質のみに着目していた従来のトポロジーでは捉えきれない対象，すなわち**多様体の微分構造**が新しい研究対象として浮かび上がってきた．微分構造を主な研究対象とす

ヒルツェブルフ（F. E. P. Hirzebruch, 1927– ）



現代ドイツの誇る数学者のひとり．本書にも登場するホップの弟子．指数定理の発見で有名．発見当時の思い出によると，指数定理がなりたつとしたらこの形の多項式に違いないと当たりをつけ，滞在中だったプリンストンの図書室に行くと，到着したばかりの研究誌にトムのコボルディズム理論の報告が出ているのを見つけた．その結果を見ると，（多分，瞬間的だったと思われるが）指数定理の証明が完結したという．

誠実な人柄で，日本との関係も深い．1969年以来，ボン大学に世界各地から若手研究者を招聘する事業を始め，1982年にはボンに，マックス・プランク研究所を創設した．この研究所は，若き日に滞在したアメリカのプリンストン高等研究所がモデルになったようである．この研究所に滞在した日本人研究者は百数十名を越えている．日本数学会は1996年に「関孝和賞」を贈り，その業績を称えた．

るトポロジーとして，微分トポロジーが誕生したのである．

ミルナーは，ごく自然な方法で Σ^7 を構成した．そして，それが通常の球面 S^7 と異なることを，F. ヒルツェブルフの指数定理を用いて証明したのである．（指数定理は，当時，発見後数年しかたっていない出来たての定理であった．）

以下，指数定理とミルナーの証明方法を説明しよう．

● ヒルツェブルフの指数定理

M を4の倍数次元の，閉じた，かつ，向きづけられた多様体とする．その次元を $2k$ としよう．$2k$ は4の倍数だから，k は偶数である．４章で説明したように，このとき，k 次元サイクル同士の交点数 $C \cdot C'$ は，C と C' に関して対称的である．つまり

$$C \cdot C' = C' \cdot C$$

がなりたつ．

$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を M^{2k} の k 次元基本サイクルとする．４章で，これらの基本サイクルの間の交点行列を考えた．C_i と C_j の交点数 $C_i \cdot C_j$ の値を i 行 j 列の所に並べた行列である．M^{2k} が4の倍数次元だから，$C_i \cdot C_j = C_j \cdot C_i$ であって，交点行列は対称行列である．つまり，i 行 j 列の値と j 行 i 列の値が同じであるような行列である．

簡単な場合を考えてみよう．k が偶数のとき，k 次元球面 S^k とそれ自身との直積 $S^k \times S^k$ は4の倍数次元の多様体になる．そして，図5-2で示されたように基本サイクル C_1, C_2 を選ぶと，交点行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

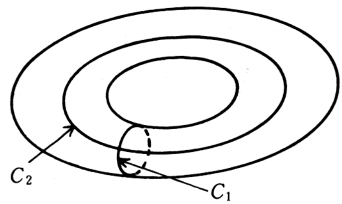


図 5-2 $S^k \times S^k$

となるのだった(4章)．この行列は明らかに対称である．

さて，線形代数学の基本的な事実として，対称行列には**指数**（または**符号数**）とよばれる不変量が対応する．

通常，指数は次のように説明される．A を対称行列とし，A を実数体上で対角行列に直す．ここで，対角行列とは

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & O \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & b_r \end{pmatrix}$$

のように，i 行 i 列以外はすべて 0 が並んだ行列である．対角成分（つまり，対角線上に並んだ数）

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_r$$

のうち，プラスのものが l 個，マイナスのものが m 個あるとすると，はじめの行列 A の**指数**とは，差

$$l - m$$

のことである．したがって，行列 A の指数は A で決まるひとつの整数なのである．（なお，指数は A だけで決まって，その対角化の仕方には依存しない.)

上に，“A を実数体上で対角化する” ということが出てきたが，これを具体的に説明しよう．

いま，A は基本サイクル $\{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$ に関する交点行列であるとする．

$a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_r, \ldots$ を適当な実数として,

$$C_1' = a_1C_1 + a_2C_2 + \cdots + a_rC_r,$$
$$C_2' = b_1C_1 + b_2C_2 + \cdots + b_rC_r,$$
$$\cdots\cdots$$
$$C_r' = d_1C_1 + d_2C_2 + \cdots + d_rC_r$$

とおいて,新しいサイクルの系 $\{C_1', C_2', \ldots, C_r'\}$ を考える.4章では,$C_1, C_2, \ldots, C_r$ の係数 $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$ がすべて整数の場合しか考えなかった.上のように実数係数の和を考えると,図形的な意味はあまりなくなってしまう.単なる形式的な計算と思ってほしい.とにかく,こうして形式的な"サイクル"の系 $\{C_1', C_2', \ldots, C_r'\}$ をつくったとする.しかも,これが"基本サイクル"であるとする.ここでいう"基本サイクル"も形式的な意味であって,もとの基本サイクル $C_1, C_2, \ldots, C_r$ の各々が逆に $C_1', C_2', \ldots, C_r'$ の実数係数の和で表せることだと思ってほしい.

要するに,実数係数も許すことにして,基本サイクル $\{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$ から,別の"基本サイクル" $\{C_1', C_2', \ldots, C_r'\}$ にうつったのである.

新しい基本サイクル $C_1', C_2', \ldots, C_r'$ の間の交点数は,もとの交点行列 A と分配法則を使って4章のように計算できる.

線形代数学の教えるところによれば,係数 $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$ をうまく選ぶことによって,新しい基本サイクル $\{C_1', C_2', \ldots, C_r'\}$ に関する交点行列が対角行列になるようにできる.(これは,はじめの交点行列 A が対称行列のとき,つまり多様体の次元が4の倍数のときに可能なのである.) これが,交点行列 A の対角化である.

具体例で考えてみよう．$S^k \times S^k$（k：偶数）の交点行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であった ($C_1 \cdot C_1 = 0,\ C_1 \cdot C_2 = C_2 \cdot C_1 = 1,\ C_2 \cdot C_2 = 0$)．この行列を対角化してみよう．この場合は簡単で，

$$C_1' = C_1 + C_2, \quad C_2' = C_1 - C_2$$

とおけば対角化できる．実際に，分配法則を使って計算すると

$$\begin{aligned} C_1' \cdot C_1' &= (C_1 + C_2) \cdot (C_1 + C_2) \\ &= C_1 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_2 \\ &= 0 + 1 + 1 + 0 \\ &= 2. \end{aligned}$$

同様に，

$$C_2' \cdot C_2' = -2, \quad C_1' \cdot C_2' = 0, \quad C_2' \cdot C_1' = 0$$

となり，新しい交点行列は対角行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

になる．対角成分には，プラス，マイナスの対角成分が 1 個ずつある．よってこの場合の指数は $1 - 1 = 0$ である．結局，$S^k \times S^k$ の交点行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の指数は 0 であることがわかった．

4 の倍数次元の多様体 M から出発し，交点行列を対角化して指数を計算したが，この指数は，交点行列を求めるときに使った基本

サイクルの取り方や，交点行列の対角化の仕方などに無関係に，もとの多様体 M だけで決まることが証明できる．これを，多様体 M の**指数**とよぶ．たとえば，上の計算によって，$S^k \times S^k$ の指数は 0 である．

多様体の指数は，4 の倍数次元の多様体についてしか定義されないが，オイラー標数と並ぶ重要な位相不変量である．（オイラー標数よりももう一段深い位相不変量である.）

ヒルツェブルフの指数定理は，M の指数を M の**特性数**とよばれる不変量を用いて計算する公式である．ここで特性数を説明する余裕はないが，特性数の最も簡単な例がオイラー標数であることを言っておこう．

ヒルツェブルフの指数定理を一般の形で述べることができないので，特別の場合に指数定理から導かれる帰結を述べることにする．そのために，もうひとつだけ新しい概念を導入しなければならない．**平行性をもつ多様体**という概念である．

定義　n 次元多様体 M^n が**平行性をもつ**とは，M^n 上に特異点のない n 個のベクトル場 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ がとれて，M^n の各点 p で $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の矢印（ベクトル）が一次独立になるようにすることができることをいう．

ただし，n 本のベクトルが一次独立とは，それらが $(n-1)$ 次元空間に入っていないことである．たとえば，3 本のベクトルが一次独立とは，それらが一平面上にないことであり（図 5-3），2 本のベクトルが一次独立とは，それらが一直線上にないことである．

n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ は平行性をもつ多様体の例である．実際，

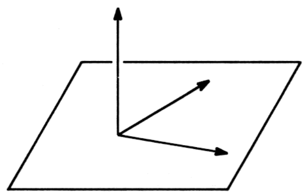


図 5-3　一次独立な 3 本のベクトル

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の座標として，$\mathbb{R}^n$ の各点で x_1 方向の長さ 1 の矢印を描いたベクトル場を X_1 とし，各点で x_2 方向の長さ 1 の矢印を描いたベクトル場を X_2 とし，以下同様に $X_3, \ldots, X_n$ を定めれば，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ という n 個のベクトル場は定義の条件を満たしている(図 5-4)．

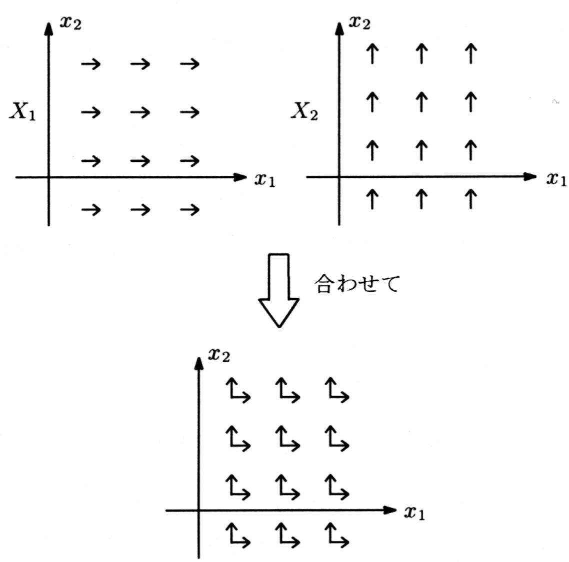


図 5-4　$n=2$ の場合

また，1 次元球面 S^1（＝円周）は平行性をもつ 1 次元多様体である．実際，S^1 上には，特異点のないベクトル場が 1 本ある（この場合 $n=1$．図 5-5 参照）．

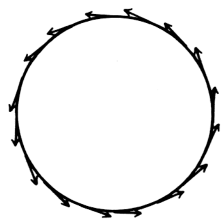


図 5-5

4 章で示したように，偶数次元の球面上には特異点のないベクトル場は存在しない．偶数次元の球面は平行性をもたないのである．

ちなみに，奇数次元の球面には特異点のないベクトル場が少なくともひとつあるが，奇数次元球面 S^n が平行性をもつのは，$n=1,3,7$ の次元に限ることが証明されている．

さて，2 次元球面 S^2 から円板をくり抜いてみよう．図 5-6 からわかるように，残りの部分をなめらかに変形すると，やはり円板になる．前に導入した言葉を使うと，残りの部分は円板に微分同相である．

円板は平面 $\mathbb{R}^2$ の一部分と考えられるから，その上に一次独立な 2 本のベクトル場 X_1, X_2 がある．すなわち，円板は平行性をもつ．

このように，2 次元球面 S^2 それ自身には平行性がないが，そこから円板をくり抜くと残りの部分（＝円板）には平行性があるわけである．このような多様体を，**概平行性をもつ多様体**という．

一般に，$\mathbb{R}^n$ の，原点からの距離が 1 以下の点全体のつくる図形を n **次元円板**という．記号で D^n と書く．D^n の“表面”は原点か

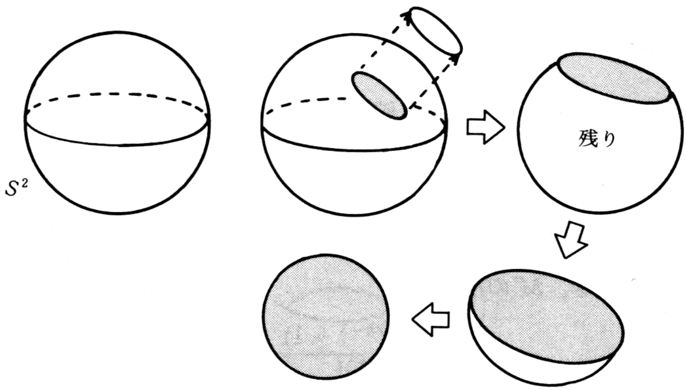


図 5-6

らの距離がちょうど 1 であるような点の全体である．したがって，D^n の表面は $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} になっている．2 次元円板（通常の円板）D^2 のふちが 1 次元球面（円周）S^1 になっているのと同じことである．

一般次元での概平行性の定義は，次のとおりである．

定義　n 次元多様体 M^n から n 次元円板 D^n をくり抜いた残りの部分が平行性をもつとき，M^n は**概平行性をもつ**という．（たとえば，任意次元の球面 S^n は概平行性をもっている．）

これで，ようやく指数定理が述べられる段階になった．

指数定理（の帰結）　M を 4 の倍数次元の，閉じた，向きづけられた多様体とする．そして，M は概平行性をもつと仮定する．このとき

M の次元 $n=8$ なら，M の指数は 7 で割り切れる．

$n=12$ なら，M の指数は 62 で割り切れる．

$n=16$ なら，M の指数は 127 で割り切れる．

$n=20$ なら，M の指数は 146 で割り切れる．

以下，同様の命題が無限に続く．

注意　上の“定理”をもっと一般的な形で格好よく述べてみよう．M を上の定理と同じ仮定を満たす多様体とし，次元 $n=4k$ とする．このとき，M の指数は，

$$\frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k$$

を既約分数に直したときの分子で割り切れる．ここに B_k $(k \geq 1)$ は**ベルヌーイ数**とよばれる有理数で，次のようなテイラー展開の係数として得られる数である：

$$\frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}x^{2k}.$$

ベルヌーイ数のはじめのいくつかを書くと，$B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$, $B_4=\frac{1}{30}$, $B_5=\frac{5}{66}$, etc., $\cdots$ である．

ベルヌーイ数などという意外なものが顔をだすところに，ヒルツェブルフの定理の深さが感じられる．

● ミルナーの方法

普通の円板にはふちがあり，そのふちは円周になっている．円板のようにふちのある曲面を**境界をもつ曲面**といい，ふちのことをその**境界**とよぶ．

一般の次元においても，n 次元円板のように，$(n-1)$ 次元の“表面”をもつ多様体を**境界をもつ多様体**とよび，“表面”になっている $(n-1)$ 次元多様体をその**境界**という．

D^n（n 次元円板）は境界をもつ n 次元多様体で，その境界は S^{n-1}（$(n-1)$ 次元球面）である．

また，中身のつまったドーナツ（図 5-7）は境界をもつ 3 次元多様体で，その境界（＝表面）はトーラス T^2 である．

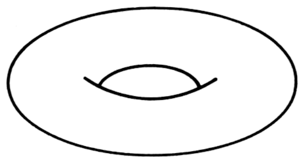


図 5-7　中身がつまっているとする

さて，エキゾチック球面を判定するミルナーの方法を説明しよう．（これは，ミルナーのもとの方法を，本質的なところはそのままにして修正したものである．）

ミルナーは，ある方法で 7 次元多様体 Σ^7 を構成し，それが通常の 7 次元球面 S^7 と位相同形であることを証明した．ここまでは認めることにする．問題は，Σ^7 が S^7 と微分同相でないことをどうやって示したか，ということにある．

ミルナーの構成した Σ^7 は複数個あるが，その内に次の条件（*）を満たす Σ^7 がある．この Σ^7 について，$\Sigma^7 \neq S^7$ を証明しよう．

（*）　Σ^7 は，ある向きづけられた（境界をもつ）8 次元多様体 M^8 の境界になっている．そして，M^8 は平行性をもち，しかも適当な 4 次元基本サイクルによる M^8 の交点行列は次のような 8 行 8 列の行列になる．（この M^8 の基本サイクルの個数は 8 なのである．）

$$
\begin{pmatrix}
2 & & & 1 & & & & \\
& 2 & 1 & & & & & \\
& 1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & & 1 & 2 & 1 & & & \\
& & & 1 & 2 & 1 & & \\
& & & & 1 & 2 & 1 & \\
& & & & & 1 & 2 & 1 \\
& & & & & & 1 & 2
\end{pmatrix}
$$

（何も書いてない所は 0．なお，この行列は，リー群の分類に現れる E_8 型のディンキン図形から導かれる.）

この行列を対角化してみると，対角成分はすべてプラスの数であることがわかる．したがって，この行列の指数は 8 である.

これだけの事実から，背理法で $\Sigma^7 \neq S^7$ がいえる．Σ^7 と S^7 が微分同相と仮定すると，次のようにして矛盾がでるのである.

Σ^7 と S^7 が微分同相であるとすると，Σ^7 と S^7 は微分構造も込めて同一視できる．S^7 は，8 次元円板 D^8 の境界であった．したがって，この同一視を通じて，M^8 と D^8 を境界にそって貼り合わせることができるはずである(図 5-8 を見てください).

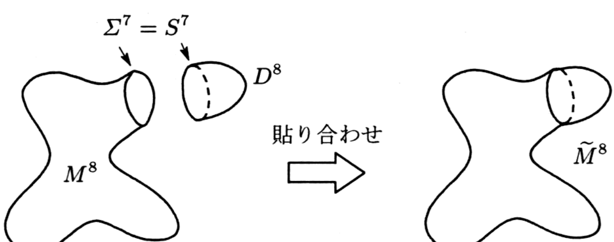


図 5-8

得られた 8 次元多様体を $\widetilde{M}^8$ としよう．$\widetilde{M}^8$ には，もはや境界はなく，閉じた，向きづけられた多様体である．しかも，$\widetilde{M}^8$ から円板 D^8 をくり抜くと，もとの M^8 にもどるが，M^8 には平行性があった(条件 (*))．したがって，$\widetilde{M}^8$ には概平行性がある．

$\widetilde{M}^8$ の交点行列はもとの M^8 の中の 4 次元基本サイクルを使って計算することができて，その行列は，すでにみたように，指数 8 をもつ．

こうして，概平行性をもち，かつ，指数が 8 の閉じた 8 次元多様体 $\widetilde{M}^8$ が構成された．しかし，これは，ヒルツェブルフの指数定理“概平行性をもつ閉じた 8 次元多様体の指数は 7 で割り切れる” に矛盾してしまう．この矛盾は，$\Sigma^7 = S^7$ と仮定したことから生じたのである．

したがって，**Σ^7 は S^7 と微分同相ではない**．

以上が，ミルナーの方法の要点である．

● 4 次元多様体の特異性

ここで，一気に現代の話題を紹介しよう．

すでに前々から，4 次元多様体には何か変わったところがあるということが，V. A. ロホリンによって気づかれていた(1952 年のロホリンの定理)．そして，カービー (R. Kirby, 1938–) とジーベンマン (L. Siebenman, 1939–) は，4 次元多様体に関するロホリンの定理が，高次元位相多様体の三角形分割問題や基本予想などの重要な問題に深いかかわりをもつことを明らかにした(1969 年)．——このあたりの事情については，拙著『4 次元のトポロジー』(日本評論社) を見て

ロホリン (V. A. Rokhlin, 1919–84)

4次元多様体の基本定理のひとつ「ロホリンの定理」の発見者．ロホリンに捧げるべく，1986年にビルクホイザー社から『失われたトポロジーを求めて』(A la Recherche de la Topologie perdue) という本が出版されたが，そこに出ているロホリン小伝によれば，モスクワ大学卒業後，第2次大戦中にドイツ軍がソヴィエトを攻撃したとき，志願兵として戦い，包囲されてドイツ軍の捕虜になったそうだ．それから逃げ出し，ソヴィエト軍に合流し，ドイツ語の翻訳係として終戦を迎えたという．いろいろなところで教えたあと，1960年にレニングラード大学の数学力学科の教授となり，21年間その職にあった．レニングラードにトポロジーを流行らせたのはロホリンであった．ロホリンはトポロジーばかりでなく，実代数幾何やエルゴード理論でもすぐれた仕事をした．

『失われた…』に掲載されているロホリンの写真では，がっしりとした気さくな感じのおじさんが紅茶のカップを前にして坐っている．

ください．なお，その本で未解決とされていた問題は，今日ほとんど解かれています——．

このように，4次元多様体論は多様体のトポロジー全体のなかで特異な位置を占めている．4次元多様体の奇妙さは，S. ドナルドソンの定理によってますますはっきりした．

ドナルドソンの定理 (1982年) M^4 を，閉じた，向きづけられた**単連結** 4次元多様体とする．もし，M^4 のすべての2次元サイク

ドナルドソン（S. K. Donaldson, 1958– ）

イギリスの大数学者アティヤ（M. F. Atiyah）の弟子．4次元多様体論に初めてゲージ理論を持ち込んだことで有名．その業績により，1986年のフィールズ賞を受けた．28歳のときである．すぐにオックスフォードの教授となり，あまりに若い教授の誕生だったので，当時のマスコミをにぎわせた．

ル C について，その自己交点数 $C \cdot C$ が 0 以上であれば，適当な 2次元の基本サイクル $C_1, C_2, \ldots, C_r$ を選んで，M^4 の交点行列を次のような単位行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

にできる．（M^4 が単連結とは，その中の任意のループが M の中で少しずつ連続変形すると，1点に縮んでしまうことです．なお，1982年の論文で仮定された単連結性は，その後の研究により不必要であることがわかっています.）

この定理がどのくらい異常な事実を言っているのかは，この定理と，“フリードマンの定理”（1981年）とを合わせて，次の系が得られることからわかる．

系　4 次元のエキゾチックな $\mathbb{R}^4$ が存在する！

すなわち，4 次元数空間 $\mathbb{R}^4$ と位相同形であって，$\mathbb{R}^4$ と微分同相にならない 4 次元多様体 W^4 が存在するというのである．

4 次元以外では，$\mathbb{R}^n$ に位相同形な多様体は $\mathbb{R}^n$ に微分同相になることがすでにわかっている．したがって，エキゾチックな $\mathbb{R}^4$ は 4 次元にしか存在しない．（なお，エキゾチックな $\mathbb{R}^4$ については，「付録 1」でもう少し詳しく解説しておきました．）

ドナルドソンは，彼の定理をどうやって証明したのかというと，理論物理学に出てくる**ヤン - ミルズ場**を使ったのである！ ヤン - ミルズ場の理論は，4 次元という次元にまさにぴったりの理論だったのである．

ドナルドソンの発見を契機として，4 次元多様体論は堰（せき）を切ったように進み始めた．その流れは今日にも続いている．

6

ベクトル束と特性類

前章までは1986年以前に書かれた文章である．今回読み直してみて，ヒルツェブルフの指数定理に出てくる“特性数”について，説明が少しあった方がよいように思われたので，以下に簡単に補足することにした．特性数の説明の前にベクトル束と特性類について触れておかねばならない．

● ベクトル束

ある空間 X の各点 p の上に 1 つずつベクトル空間 V_p が乗っている状況を考える．X 上にズラーッとベクトル空間が並んだような状況である．ベクトル空間 V_p の次元は点 p によらず一定で，しかも，点 p と点 q が近くの点であれば，その上に乗っているベクトル空間 V_p と V_q の間には，ベクトル空間の同型が p と q に連続的に依存するように与えられているとする．このような状況をひとつの対象と思って，空間 X 上の**ベクトル束**（または，**ベクトル・バンドル**）とよぶ．そして，ひとつの文字，たとえば ξ で表す．点 p の上に乗っているベクトル空間 V_p を，ベクトル束 ξ の“点 p 上の**ファイバー**”という．

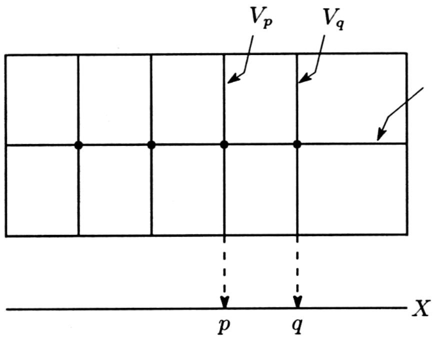


図 6-1　ベクトル束

ベクトル束の例に，なめらかな多様体 M の**接ベクトル束** τ_M がある．これは，M の各点 p において，M の**接空間** T_p（すなわち，点 p で M に接する接ベクトル全体のなすベクトル空間）を考え，p の上に T_p が乗っていると考えたものである．接ベクトル束 τ_M では，点 p 上のファイバーは接空間 T_p である．

M が 1 次元の曲線の場合は，曲線 M の各点で M の接線を考えて，それらを曲線 M にそって全部並べてみせたようなものが，M の接ベクトル束である．接線は曲線の“1 次近似”のようなものであるから，多様体 M の接ベクトル束 τ_M は M の 1 次近似だと思ってよい．接ベクトル束は微分トポロジーで大切な役割を果たすが，接ベクトル束が多様体の形の 1 次近似であることを考えれば，それも当然なことであろう．

接空間を並べたのが接ベクトル束だと言われても，はじめのうちは気分的に納得しがたいものがあると思う．たとえば，目の前におかれた曲面の場合などを想像すると，曲面 M の点 p における接平面 T_p は別の点 q における接平面 T_q と，多くの場合，交わってしまう．これでは，各点で接空間を考えてそれを全部並べるとすると，かな

り複雑な図形になってしまうのではないかと思われるかもしれない．しかし，それは一種の錯覚である．曲面 M の入っている空間（たとえば今，われわれがいる 3 次元空間）の中で，"接平面をわかりやすく図解するために"，曲面 M とその接平面 T_p, T_q をいっしょに描いてしまったために，T_p と T_q が交わってしまうのである．しかし，本来，接平面と曲面とは概念的に違うもので，いわば，"存在のレベル" が違うのである．曲面の接ベクトルは，曲面上に適当に描いた曲線の速度ベクトルとも思えるわけであるが，走っている自動車とその速度ベクトルのことを想像してもわかるように，速度ベクトルは自動車のような物質的存在でなく，もっと "理論的存在" である．速度ベクトルは自動車の速度を理論的に表すものであるから，それ自身は自動車の属する物質世界には属していない．だから，ある自動車の速度ベクトルと，隣を走っている別の自動車の速度ベクトルがぶつかるかもしれない，などと心配する人は誰もいない．同様に，接ベクトルの集まりとしての接空間も，理論的にいえば，互いに異なる 2 点，p と q，における接ベクトル（違う自動車の速度ベクトル）が一致したり交わったりすることはありえず，T_p と T_q が交わることは理論的にはありえないわけである．

● 特性類

一般に，特性類というのは，空間 X 上のベクトル束 ξ が与えられたとき，X 上にズラーッと並んだベクトル空間たち（すなわち，ξ のファイバーたち）の並び方の "ねじれ具合" を記述するものである．つまり，ξ のファイバーたち $\{V_p\}$ は，X 上に "おとなしく" 並んでいると決まっているわけではなく，p が X 上を動くと，それにつれ

て V_p も少しずつ回転するかもしれない．ξ のファイバーたちは全体としてねじれているわけである．このねじれ具合を記述するのが**特性類**で，X の“コホモロジー群”とよばれる可換群の要素になっている．

これまでに多様体 M の中の k 次元サイクルというものをしばしば考えた．ある空間 X の中の k 次元サイクルの全体のつくる可換群のことを X の k **次元ホモロジー群**とよび，

$$H_k(X)$$

という記号で表す．(本当は，サイクル全体のつくる可換群に，“境界サイクル”を使って同値関係を入れ，それによる同値類の全体のつくる可換群がホモロジー群なのだが，正確な定義はここでは省略する.）問題の**コホモロジー群**というのは，“係数群”と称する可換群 G をひとつ決めたとき，各次元 k に **G を係数群とする k 次元コホモロジー群**という群が定まるもので，記号で

$$H^k(X;G)$$

と書かれるものである．だいたい，k 次元ホモロジー群 $H_k(X)$ から G への準同型写像全体のつくる群が，G を係数群とする k 次元コホモロジー群だと思えばよい．(これも実は乱暴な説明なのだが，お許しください.）準同型写像

$$f : H_k(X) \longrightarrow G$$

は $H^k(X;G)$ の要素である．$H^k(X;G)$ の要素を k **次元コホモロジー類**とよぶ．

k 次元コホモロジー類 $f \in H^k(X;G)$ と k 次元サイクル C が与えられたとき，f の C における値（写像 f による C の像）が G の中

に定まる．この値を，“対” のような記号で，

$$\langle f, C \rangle$$

と書く．

さて，特性類の代表的なものに，**シュティーフェル-ホイットニー類**，**チャーン類**，**ポントリャーギン類**の３つがある．

シュティーフェル-ホイットニー類というのは，X 上のベクトル束 ξ が与えられたとき，それに応じて，一連のコホモロジー類

$$w_1(\xi),\ w_2(\xi),\ \ldots,\ w_n(\xi),\ \ldots$$

を対応させるもので，$w_k(\xi)$ は $\mathbb{Z}/2$ を係数群とする k 次元コホモロジー群の要素である：

$$w_k(\xi) \in H^k(X;\mathbb{Z}/2), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots.$$

ここに，$\mathbb{Z}/2$ は０と１の２元からなる最も簡単な非自明群である．

シュティーフェル-ホイットニー類 $w_k(\xi)$ は任意のベクトル束 ξ について意味をもつが，チャーン類は**複素ベクトル束**についてのみ意味がある．空間 X 上の**複素ベクトル束**とは，X の各点上に複素ベクトル空間が１つずつ並んだものである．ξ が X 上の複素ベクトル束であれば，チャーン類は，ξ に一連の偶数次元のコホモロジー類

$$c_1(\xi),\ c_2(\xi),\ \ldots,\ c_n(\xi),\ \ldots$$

を対応させる．$c_k(\xi)$ は，整数全体のなす可換群 $\mathbb{Z}$ を係数群とする $2k$ 次元のコホモロジー群 $H^{2k}(X;\mathbb{Z})$ の要素である．

最後にポントリャーギン類であるが，これは（必ずしも複素ベクトル束でない）一般のベクトル束 ξ に，一連の，４の倍数次元のコ

ホモロジー類

$$p_1(\xi),\ p_2(\xi),\ \ldots,\ p_n(\xi),\ \ldots$$

を対応させるものである．$p_k(\xi)$ は $H^{4k}(X;\mathbb{Z})$ の要素である．

ベクトル束 ξ として，多様体 M の接ベクトル束 τ_M をとった場合が特に重要である．このとき，τ_M のシュティーフェル-ホイットニー類 $w_k(\tau_M)$ のことを簡単に $w_k(M)$ と書く．同様に，τ_M のポントリャーギン類 $p_k(\tau_M)$ のことを $p_k(M)$ と書く．

M が複素多様体であれば，M の接ベクトル束 τ_M は自然に複素ベクトル束とみなすことができて，チャーン類 $c_k(\tau_M)$ が考えられる．これを簡単に $c_k(M)$ と書く．

特性類という名前のとおり，$w_k(M)$, $c_k(M)$, $p_k(M)$ は多様体 M の性質をよく反映するものになっている．

たとえば，M が向きづけ可能であるための必要十分条件は，M の第 1 シュティーフェル-ホイットニー類が $H^1(M;\mathbb{Z}/2)$ の要素として 0 になることである：

$$w_1(M)=0.$$

また，M に "スピン構造" とよばれる構造が入るための必要十分条件は

$$w_1(M)=0 \quad \text{かつ} \quad w_2(M)=0$$

である．

"複素次元" が n であるような複素多様体 M は，通常の多様体としての次元が $2n$ である．そこで，複素次元 n の複素多様体 M が閉じていれば，それ自身が $2n$ 次元のサイクル（**基本サイクル**）になっ

ているので，それを

$$[M] \in H_{2n}(M; \mathbb{Z})$$

と書くことにする．M の第 n チャーン類 $c_n(M)$ も同じく $2n$ 次元のコホモロジー類なので，コホモロジー類 $c_n(M)$ を準同型写像 $c_n(M)$: $H_{2n}(M) \to \mathbb{Z}$ とみたとき，$[M]$ において $c_n(M)$ のとる値が $\mathbb{Z}$ の中に定まる：

$$\langle c_n(M),\ [M] \rangle \in \mathbb{Z}.$$

じつは，この数 $\langle c_n(M),\ [M] \rangle$ は M のオイラー標数 $e(M)$ に等しいことが知られている：

$$\langle c_n(M),\ [M] \rangle = e(M).$$

● 特性数

上で考えた数 $\langle c_n(M),\ [M] \rangle$ は，これから説明しようとしている**特性数**の特別な場合になっている．

複素次元 n の閉じた複素多様体 M の $c_n(M)$ の場合のように，ある特性類の，コホモロジー類としての次元（$c_n(M)$ については $2n$）が，たまたま多様体 M の次元（やはり $2n$）に一致しているときには，両者を“対”にして，数 $\langle c_n(M),\ [M] \rangle$ が考えられた．

ある特性類の次元と多様体の次元がうまく一致することは，一般には期待できないが，コホモロジー類同士の“積”を考えると，次元を合わせることが可能となって，上と同様の対が考えられる．それについて説明しよう．

使う事実は，コホモロジーの理論に備わった（“カップ積”とよばれる）積構造である．すなわち，

> k 次元コホモロジー類 f と l 次元コホモロジー類 g は掛け算することができて，積 fg は $(k+l)$ 次元コホモロジー類になる．

という事実である．

たとえば，複素次元 3 の閉じた複素多様体 M があるとしよう．基本サイクル $[M]$ は 6 次元である．前にみたように，$c_3(M)$ のコホモロジー類としての次元は 6 であるから $[M]$ と一致している．しかし，$c_1(M)$ の次元は 2 であり，$c_2(M)$ の次元は 4 なので，これらのチャーン類の次元は $[M]$ の次元と合わない．

しかし，コホモロジーの積構造を利用して，積

$$c_1(M)c_2(M)$$

を考えると，この積の次元は $2+4\ (=6)$ なので，$[M]$ の次元と一致し，対をつくった値

$$\langle c_1(M)c_2(M),\ [M]\rangle$$

が考えられる．この値は整数である．また，$c_1(M)$ の 3 乗を考えれば，$(c_1(M))^3$ の次元も $2+2+2\ (=6)$ なので $[M]$ の次元と一致し，対をつくった値

$$\langle (c_1(M))^3,\ [M]\rangle$$

が考えられる．この値も整数である．これらの整数のことを**特性数**というのである．一般的に定義すると次のようになる：

定義　M を複素次元 n の閉じた複素多様体とする．何個かの自然数 $k, l, \ldots, m$ を考え，

$$k+l+\cdots+m=n$$

がなりたつとする．このとき，積 $c_k(M)c_l(M)\cdots c_m(M)$ のコホモロジー類としての次元は $2n$ になるので，基本サイクル $[M]$ の次元と一致し，対にした数

$$\langle c_k(M)c_l(M)\cdots c_m(M),\ [M]\rangle$$

が考えられる．この数のことを，$(k,l,\ldots,m)$ 型の**特性数**とよぶ．チャーン類から構成した特性数なので，**チャーン数**とよぶこともある．

ヒルツェブルフの指数定理に必要なのは，ポントリャーギン類から構成される**ポントリャーギン数**という特性数である．ポントリャーギン数を定義するためには，多様体は複素多様体でなくともよいが，M の次元が 4 の倍数であることを要する．ポントリャーギン類 $p_k(M)$ のコホモロジー類としての次元は $4k$ であったことを思いだしてほしい．

定義　M を $4n$ 次元の向きづけられた閉じた多様体とする．何個かの自然数 $k,l,\ldots,m$ を考え，

$$k+l+\cdots+m=n$$

がなりたつとする．このとき，積 $p_k(M)p_l(M)\cdots p_m(M)$ のコホモロジー類としての次元は $4n$ になるので，基本サイクル $[M]$ の次元と一致し，対にした数

$$\langle p_k(M)p_l(M)\cdots p_m(M),\ [M]\rangle$$

が考えられる．この数のことを，$(k,l,\ldots,m)$ 型の**ポントリャーギン数**とよぶ．

● ヒルツェブルフの指数定理

ヒルツェブルフは“L 多項式”とよばれる一連の多項式,

$$L_1(p_1),\ L_2(p_1,p_2),\ \ldots,\ L_n(p_1,p_2,\ldots,p_n),\ \ldots$$

を導入した．これらは有理数係数の多項式であり，変数

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots$$

はポントリャーギン類を表していると考える．はじめのいくつかの L 多項式をみると,

$$L_1(p_1) = \frac{1}{3}p_1,$$

$$L_2(p_1,p_2) = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2),$$

$$L_3(p_1,p_2,p_3) = \frac{1}{945}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3).$$

ヒルツェブルフは一般の $L_k(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ の計算法も与えているが，ここでは省略する．ただ，一般の $L_k(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ における p_k の係数が，5 章に出てきた数

$$\frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k$$

であることを言っておこう．

次の定理がヒルツェブルフの指数定理である．

定理　M を $4n$ 次元の向きづけられた閉じた多様体とすると，M の指数は次の式の値に等しい：

$$\langle L_n(p_1,p_2,\ldots,p_n),\ [M]\rangle.$$

この式は少し形式的な書き方になっているが，たとえば，$4n = 4$ の場合，4 次元多様体 M の指数はポントリャーギン数を使って

$$\frac{1}{3}\langle p_1(M),\ [M]\rangle$$

で計算される，という意味である．また，$4n = 8$ の場合，8 次元多様体 M の指数はポントリャーギン数を使って

$$\frac{1}{45}(7\langle p_2(M),\ [M]\rangle - \langle p_1(M)^2,\ [M]\rangle)$$

で計算される，などの意味である．（L 多項式の定義を見てください.） これらの公式には分数が入っているが，指数は整数なので，これらの公式で計算した結果はすべて整数になる．そこがなんとも神秘的である．

M が概平行性をもつ $4n$ 次元多様体であれば，

$$p_1(M) = 0,\ \ p_2(M) = 0,\ \ \ldots,\ \ p_{n-1}(M) = 0$$

がなりたち，$p_n(M)$ だけが残る．このことと指数が整数であることを使うと，５章で概平行性をもつ多様体について述べた“指数定理の帰結”が証明できる．考えてみてほしい．（なお，指数のことを**符号数**ということもある.）

7

その後の発展

この本の基となった『幾何学をみる』初版が発行された1986年以来，4次元多様体論は大きく発展した．また，3次元多様体論でも大きな進展があった．これらの動きのなかから代表的な結果を選んで紹介しよう．

ドナルドソンは4次元多様体論に初めて“ゲージ理論”を持ち込んで，それまでの研究の流れを一新してしまった(1982年)．ドナルドソンの使ったゲージ理論は，$SU(2)$ という非可換なリー群を構造群とするもので，非可換ゆえに扱いが難しいところがあった．1994年にサイバーグ（N. Seiberg, 1956– ）とウィッテン（E. Witten, 1951– ）は，$U(1)$ というごくやさしい可換なリー群を構造群としてもつゲージ理論を使って，“サイバーグ-ウィッテン方程式”とよばれる方程式を定式化し，その解空間に4次元多様体の情報が入っていることを主張した．物理の要請に従えば，ドナルドソン理論とサイバーグ-ウィッテン理論は等価な理論であるという．しかし，(筆者の理解するところでは）その等価性は数学的には証明されていないようである．数学的な証明がなくとも，サイバーグ-ウィッテン理論を使って4次元多様体についての新しい結果が続々と得られているので，サイバー

グ - ウィッテン理論がドナルドソン理論と同程度の深さをもつ理論であることは間違いないであろう．しかも，構造群がやさしいので，今ではドナルドソン理論よりサイバーグ - ウィッテン理論を使う研究者の方が多い．

サイバーグ - ウィッテン理論の目覚しい応用として，古田幹雄氏による“$\frac{5}{4}$ 定理”の証明がある．古田氏はサイバーグ - ウィッテン理論を応用して（と言うか，より精密化して）次の定理を証明した（1995 年）：

定理　スピン構造をもつ 4 次元の閉じた多様体 M について，もしその第 2 ベッチ数がゼロでなければ，次の不等式がなりたつ：

$$b_2(M) \geqq \frac{5}{4}|M \text{ の指数}| + 2.$$

ここに，左辺は M の第 2 ベッチ数で，右辺第 1 項は M の指数の絶対値である．

6 章の特性類のところで述べたように，M がスピン構造をもつことと，M の第 1，第 2 シュティーフェル - ホイットニー類がゼロになることとは同値である：

$$w_1(M) = 0, \quad w_2(M) = 0.$$

古田の不等式の等号がなりたつ例に，$K3$ 曲面 M がある．$K3$ 曲面は“曲面”といっても“複素曲面”（複素数の意味で 2 次元）なので，通常の多様体の意味では 4 次元である．$K3$ 曲面 M はスピン構造をもち，しかも

$$b_2(M) = 22, \quad \text{指数} = -16$$

なので，古田の $\frac{5}{4}$ 定理において等号がなりたつ例になっている．

古田の定理は次の $\frac{11}{8}$ 予想とよばれる予想の“部分的解決”と考えられる：

予想 スピン構造をもつ 4 次元の閉じた多様体 M について，次の不等式がなりたつであろう：

$$b_2(M) \geqq \frac{11}{8}\,|M \text{ の指数}|.$$

$K3$ 曲面は，この予想においても，等号をなりたたせる例になっている．

なお，$\frac{11}{8}$ 予想は筆者が初めて予想したもので(1980 年ごろ)，1982 年に間接的な表現で論文に発表した．この予想は現在（2007 年 12 月）も未解決である．

5 章の中の「4 次元多様体の特異性」の節で名前だけ出した“ロホリンの定理”とは次の定理である：

定理 スピン構造をもつ 4 次元の閉じた多様体の指数は 16 で割り切れる．

このロホリンの定理（1952 年）が 4 次元多様体の形状を制限した最初の定理である．次に現れたのが，同じく「4 次元多様体の特異性」の節で紹介したドナルドソンの定理（1982 年）である．ロホリンの定理とドナルドソンの定理，そしていま紹介した古田の定理の 3 つを“(なめらかな) 4 次元多様体論の基本定理”とよんでもよいと思う．

● 3次元ポアンカレ予想

ある空間 X が**単連結**であるとは，その空間の中に任意の閉曲線（ループ）を描くと，ループという性質を保ったまま，その空間の中で連続的に1点に縮められることをいう．たとえば，2次元球面は単連結であり，閉曲面の中で単連結なものは球面しかない．

ポアンカレは1904年に，同様なことを3次元多様体で考えたらどうなるか，という問題をだした．これが有名なポアンカレ予想である．

予想　閉じた3次元の多様体 M が単連結ならば，M は3次元球面であろう．

ポアンカレがこの予想を提起して以来100年間に，ミルナーによるエキゾチック球面の発見とか，高次元ポアンカレ予想の解決（スメール，1961年），4次元ポアンカレ予想の解決（フリードマン，1981年）などの成果があったものの，本来のポアンカレ予想は未解決のままだった．クレイ数学研究所が西暦2000年を記念して，ポアンカレ予想を含む7大問題に，一問題100万ドルの懸賞金を懸けたことは有名である．

2002年か2003年ごろ，この本来のポアンカレ予想がペレルマン（G. Perelman, 1966– ）というロシアの数学者によって解決されたらしいという噂（うわさ）が流れた．彼の論文はインターネットに掲示され，何人もの有能な研究者により検証された結果，どうやら正しいらしい．

彼の方法は，1980年代初めに，ハミルトン（R. S. Hamilton, 1943–）により提案されたプログラム，すなわち，与えられた3次元多様体にまず適当なリーマン計量を入れ，それを“リッチ・フロー”と称

フリードマン（M. H. Freedman, 1951– ）

本書ではあまり触れる機会がなかったが，4 次元多様体の位相的分類（微分構造を考えない同相類の分類）を，少なくとも単連結多様体に関しては完全に成し遂げた数学者．彼の定理によれば，単連結で向きづけられた 4 次元の閉じた位相多様体 M の同相類は，$H_2(M;\mathbb{Z})$ 上の交点形式とカービー - ジーベンマン類という特性類で分類される．とくに，4 次元ポアンカレ予想は正しい．彼はこの業績により，ドナルドソンとともに 1986 年のフィールズ賞を受賞した．

フリードマンの定理の基礎になったのが，キャッソンのハンドルとよばれる特殊な図形である．フリードマンはこの複雑な図形をとことん調べて彼の定理に達した．この定理証明後，アメリカ東部の有名大学からも教授として招聘されたが，カリフォルニアにとどまった．カリフォルニアが好きなのだと思う．

現在は，トポロジーよりもコンピュータの研究に力を入れているようである．

する微分方程式を使って変形していくと，ついには好適な計量になるであろう，というプログラムを完全に遂行したもののようである．ペレルマンはこの方法により，サーストン（W. P. Thurston, 1946– ）の“幾何化予想”という，ポアンカレ予想を含む大予想も同時に解決したという．

2006 年夏にマドリードで開かれた国際数学者会議においてペレルマンにフィールズ賞が授与されることになったが，なぜか当人が受賞を拒否してしまった．その理由は明らかでない．

筆者は自分自身でペレルマンの論文を検討したわけではないので，ペレルマンの仕事についてあまり語る資格がない．興味ある読者は，最近出版された次の本が参考になると思う．

戸田正人 :『3 次元トポロジーの新展開』～リッチフローとポアンカレ予想～　臨時別冊・数理科学 2007 年 7 月．

付記 1（オイラーの多面体定理に関連して）

オイラーの原論文（1752/3）を見ると，$\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2$ に相当する定理が証明されていて，$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ を球面の不変量と考える立場にはたっていないようである．

この論文を教えてくださった山田明雄氏に感謝します．

付記 2

この本を読まれて興味をもたれた読者には，さらに本間龍雄『ポアンカレ予想物語』（数セミ・ブックス，日本評論社，1985 年）を読まれることをお勧めします．

付記 3（1997 年 5 月）

1994 年までの 4 次元トポロジーの主な結果の紹介を試みたものに，

松本幸夫「4 次元多様体の今と昔」，『数学』第 47 巻第 2 号，158–175，1995 年 4 月，

があります．（なお，そこで“ドルガチェフ曲面”とよばれている複素曲面は“飯高・ドルガチェフ曲面”とよばれるべきであることを，諏訪立雄氏から注意されました．諏訪氏に感謝しつつ訂正いたします.）また，低次元トポロジーと深くかかわるようになったゲージ

理論については，次の深谷氏の書物をご覧ください.

深谷賢治『ゲージ理論とトポロジー』，シュプリンガー現代数学シリーズ，1995 年 10 月．シュプリンガー・フェアラーク東京.

付録 1

$\mathbb{R}^4$ 上のエキゾチックな微分構造

フリードマン（M. Freedman）により 4 次元ポアンカレ予想が解決されたのは 1981 年のことであった．それに続いて，1982 年に，さらにもうひとつの驚くべき発見が 4 次元多様体のトポロジーにおいてなし遂げられた．それは，4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 上に，通常の微分構造とは異なる微分構造が存在するという発見である．4 次元以外のユークリッド空間は，通常の微分構造以外の微分構造をもち得ないことはすでにわかっているから，このことは 4 次元多様体のトポロジーの "異常さ" を端的に物語るものといえよう．$\mathbb{R}^4$ 上に異種の（エキゾチックな）微分構造が存在する，という認識は，4 次元多様体に関する，ある基本定理から得られる．この基本定理は，ドナルドソン（S. Donaldson）という，フリードマンよりさらに若い数学者により証明されたものである．

以下，彼の基本定理の解説を試みよう．

● 高次元トポロジーと低次元多様体

今では，やや古い話になってしまったが，ミルナー（J. Milnor）が7次元球面上に，通常の微分構造とは別のいわゆるエキゾチックな微分構造の存在を示して，世間をアッといわせたのは，1956年のことである．それ以来，微分トポロジーとよばれる分野は，目覚ましい発展を遂げ，たとえば，5次元以上の球面上に何個のエキゾチックな微分構造があるか，というようなことは，少なくとも原理的には完全に明らかにされた．球面ばかりでなく，一般の高次元多様体についても，その上の微分構造なり，PL構造（三角形分割の構造）なりを統制する理論もほぼ完全に仕上がっている．

このような高次元多様体の微分トポロジーを通じて明らかになったのは，高次元多様体の微分構造やPL構造は，その多様体の接バンドルにより把握される，という事実であった．よく知られているように，多様体の接バンドルは，その多様体から然（しか）るべき“分類空間”とよばれる空間への，ある写像のホモトピー類により分類できる．したがって，多様体のトポロジーは，ある種の空間とその空間の間の写像のホモトピー論的な研究に帰着される，と考えてよかろう．これを標語的に言えば，“多様体論はホモトピー論に還元される”，あるいは（この言い方が少々言いすぎならば）“多様体のトポロジーはホモトピー論的な情報によって把握可能である”とでもなるだろうか．これが，高次元多様体論の基本的認識ではなかったかと思う．

1960年代あたりから，上述のような高次元多様体論の基本認識が，3次元4次元の，いわゆる低次元多様体論においてもそのままなりたつものかどうか，それを確かめるべく多くの努力が傾けられてき

た．はじめに述べたフリードマンの仕事（1981 年）とドナルドソンの基本定理（1982 年）は，この問題に重要な鍵を与えるものであった．それによれば，この問いはある場合には正しく，ある場合には誤っている．

フリードマンの定理は，一種の肯定的解答と考えられる．彼の定理によれば，上述の高次元多様体論の“基本的認識”は 4 次元単連結**位相**多様体についてはなりたつ：

フリードマンの定理（存在定理）整数環 $\mathbb{Z}$ 上で定義された任意の非特異（unimodular）双一次形式について，それを交点形式とする単連結の閉じた 4 次元位相多様体が存在する．

（一意性定理）（i）単連結の閉じた 4 次元位相多様体 M の交点形式がⅡ型（すなわち対角成分がすべて偶数）ならば，M と同値な交点形式をもつ 4 次元単連結閉位相多様体は M と位相同形であり，(ii) もし M の交点形式がⅠ型（すなわちⅡ型でない）ならば，M と同値な交点形式をもつ 4 次元単連結閉位相多様体の位相同形類はちょうど 2 つある．

4 次元球面 S^4 は自明な交点形式をもつから，4 次元ポアンカレ予想はこの定理の特別な場合である．

この定理の (ii) にいう 2 つの位相同形類は，カービー-ジーベンマン類とよばれるコホモロジー類 $k(M) \in H^4(M;\mathbb{Z}_2)$ で決定される．

M の交点形式は，M のホモトピー型で定まり，カービー-ジーベンマン類 $k(M)$ は，M の（位相的）接バンドルによって定まる．したがって，上の定理は，高次元多様体論の基本的認識が 4 次元**位相**多様体についてもそのままの形で有効であることを示している．単な

る位相多様体（微分構造やPL構造を考えない位相多様体）の，位相同形による分類に話を限るならば，である．

● ドナルドソンの基本定理

ところが，4次元多様体の微分構造を問題にするや否や，事情は一変する．以下に述べるドナルドソンの基本定理，およびその系として得られる $\mathbb{R}^4$ 上のエキゾチックな微分構造の存在によって，高次元微分トポロジーの夢は，4次元のなめらかな多様体については残念ながら，そのままの形ではなりたたないことがわかる．

実際，$\mathbb{R}^4$ のホモトピー型は，1点のホモトピー型と同じく自明であり，その接バンドルも自明である．$\mathbb{R}^4$ に2種類以上の微分構造が存在するとしても，ホモトピー論的な情報でそれらを区別するのは不可能であろう．ホモトピー論に還元できない何ものかが，4次元の微分トポロジーにはある．こうして，高次元と同様の理論を4次元に期待する夢想はついえ去った．しかし，同時に高次元とは別種の“4次元トポロジー”の誕生が告げられたとも考えられよう．

ドナルドソンの基本定理は，単連結で閉じた，なめらかな4次元多様体 M^4 の交点形式に関するものである．交点形式は，フリードマンの定理の主張にも出てきたものであり，話が多少前後するが，ここで簡単に復習しておこう．

M^4 の整係数2次元ホモロジー群 $H_2(M^4;\mathbb{Z})$ を考える．ここで $H_2(M^4;\mathbb{Z})$ の定義まで遡ることはさしひかえるが，要するに M^4 の中の“2次元サイクル”全体を“ホモロガス”なる同値関係で類別して得られる可換群である．“2次元サイクル”とは，M^4 の中の向きづけられた閉曲面のようなものと思っておけば，まず間違いない．

$H_2(M^4;\mathbb{Z})$ の 2 元 x と y が，M^4 の中の 2 次元サイクル C_1, C_2 で，それぞれ表されているとする．C_1, C_2 を一般の位置で交わらせる．いまの場合，交わりは有限個の点になる(図 1)．各々の交点 p_i のところで，その交わりが "正の交わり" か "負の交わり" かが区別され，交点 p_i の符号 ε_i $(=\pm 1)$ が決まる．

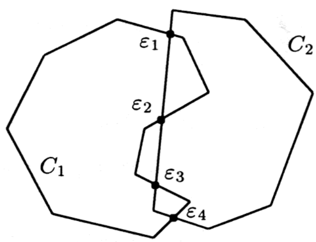


図 1

C_1 と C_2 の交点全体にわたって ε_i を加え合わせたもの $\sum_i \varepsilon_i$ は，C_1 と C_2 の交点数とよばれる整数であり，$C_1 \cdot C_2$ などの記号で表される．$C_1 \cdot C_2$ の値は C_1, C_2 が代表しているホモロジー類 x, y によって定まり，したがって x と y の交点数 $x \cdot y$ が意味をもつ $(x \cdot y = C_1 \cdot C_2)$．対 (x, y) に整数 $x \cdot y \in \mathbb{Z}$ を対応させる写像は，x, y の各々について線型であり，こうして双一次形式

$$H_2(M^4;\mathbb{Z}) \times H_2(M^4;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad (x, y) \longmapsto x \cdot y$$

が定義された．ポアンカレの双対定理により，これは非特異な双一次形式である．これが M^4 の**交点形式**にほかならない．

4 次元多様体論の最も根本的な問題は次のようなものである．

問題　どんな非特異双一次形式が，4 次元閉多様体の交点形式として実現されるか．

先に述べたフリードマンの定理によれば，単連結な 4 次元**位相**多様体により実現される非特異双一次形式にはなんの制限もない．どんな非特異双一次形式も単連結**位相**多様体によって実現できる．

ところが，**なめらかな**多様体の交点形式に関して次のような制約が知られていた．これは，ロホリン（Rokhlin）の定理（1952 年）とよばれ，ドナルドソンの定理（1982 年）が出るまでに知られていた，交点形式に関する唯一の制約である．

ロホリンの定理　単連結で**なめらかな**閉じた 4 次元多様体 M^4 の交点形式がⅡ型であれば，その符号数は 16 で割り切れる．

ここでいう**符号数**とは交点形式を表す行列（それは対称行列）を実数上対角化したとき，正の対角成分の個数から負の対角成分の個数を引いて得られる数のことである．

たとえば次の行列 E_8 で与えられる双一次形式はⅡ型であるが，その符号数が 8 であるので，ロホリンの定理により，なめらかで閉じた単連結 4 次元多様体の交点形式にはなり得ない．

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & & & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{（空白の所は 0）}$$

それでは，E_8 を 2 つ対角的に並べた行列 $E_8 \oplus E_8$ はどうだろう

か．この行列はII型であり，かつ符号数は 16 であるから，もはやロホリンの定理にはひっかからない．$E_8 \oplus E_8$ を交点形式にもつなめらかで閉じた単連結4次元多様体が存在するかどうかは，実に30年の間未解決の難問だった．ドナルドソンの基本定理は，この難問に否定的に答えたのである．

ドナルドソンの基本定理　なめらかな4次元単連結閉多様体の交点形式が正定値なら，それは単位行列で表される標準的双一次形式に同値である．

この定理を $E_8 \oplus E_8$ に適用してみよう．行列 $E_8 \oplus E_8$ はその階数（$=16$）と符号数（$=16$）が一致しているから，正定値である．ところが $E_8 \oplus E_8$ は単位行列に同値にならない．これは，$E_8 \oplus E_8$ を交点形式にもつなめらかな4次元閉多様体（単連結）が存在しないことを意味している．

● $\mathbb{R}^4$ 上のエキゾチックな微分構造

ドナルドソンの定理から，どのようにして $\mathbb{R}^4$ 上のエキゾチックな微分構造が導かれるのだろうか．

次の定義はよく知られている．2つのなめらかな多様体 V と W の間の写像 $f: V \to W$ が，V の局所座標系に関して何回でも微分可能なとき，f はなめらかな写像であるといわれる．また，V と W の間の同相写像 $h: V \to W$ があって，h も h^{-1} も共になめらかな写像であれば，h は**微分同相写像**とよばれる．そのとき V と W とは**微分同相**であるという．

さて，$\mathbb{R}^4$ には，4 次元数空間としての標準的座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) がある．$\mathbb{R}^4$ 上の関数 f が微分可能かどうかは，通常，この座標に関連して決められる．座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) により定まる $\mathbb{R}^4$ の微分構造が，“通常の微分構造” である．

$\mathbb{R}^4$ 上にエキゾチックな微分構造が存在するという主張は，次の主張と同値である：

主張　あるなめらかな 4 次元多様体 V^4 があって，V^4 は $\mathbb{R}^4$ と位相同形であるが，通常の微分構造の入った $\mathbb{R}^4$ とは決して微分同相にならない．

V^4 の構成は，有名な $K3$ 曲面 M^4 から出発する．M^4 はなめらかな単連結 4 次元閉多様体であって，M^4 の向きを通常の（複素座標から決まる）向きと反対にとると，その交点形式は

$$E_8 \oplus E_8 \oplus U \oplus U \oplus U, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という形になる．U は，2 つの球面の直積 $S^2 \times S^2$ の交点形式と同値である．

ここに，キャッソン（A. Casson）による無限回構成法を適用すると，M^4 の中に，互いに交わらない 3 つの開集合 O_1, O_2, O_3 が構成され，次の性質（*）をもつようにできる．

性質（*）　各々の O_i の固有ホモトピー型は $S^2 \times S^2 - \{1\text{ 点}\}$ と同じであり，しかも，M^4 の交点形式をこれら 3 つの開集合 O_1, O_2, O_3 に制限してみたものが，$E_8 \oplus E_8 \oplus U \oplus U \oplus U$ の中の 3 つの $U \oplus U \oplus U$ にちょうどなっている．

フリードマンは，4 次元ポアンカレ予想の証明に成功する以前，キャッソン構成からできる開集合のもつ著しい性質に気がついた．上の開集合 O_1, O_2, O_3 に即してそれを述べると次のようになる．

定理　O_i をうまく構成すると，O_i は球面の直積 $S^2 \times S^2$ の中になめらかに埋め込めるとしてよい．しかも各々の O_i の中には，あるコンパクト集合 F_i があって，O_i をこの埋め込みで $S^2 \times S^2$ の部分集合とみなし，F_i も $F_i \subset S^2 \times S^2$ と考えるとき次の (i)，(ii) がなりたつ．

(i)　$H_2(F_i;\mathbb{Z}) \to H_2(S^2 \times S^2;\mathbb{Z})$ は同型である．

(ii)　$S^2 \times S^2 - F_i = V_i^4$ は $\mathbb{R}^4$ と固有ホモトピー型が同じである（図 2）．

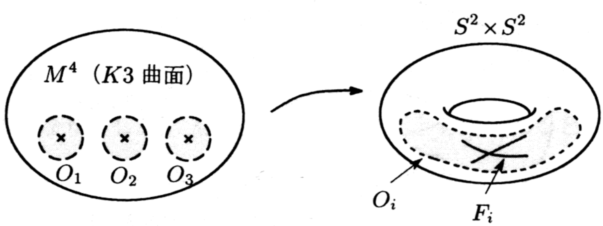


図 2

フリードマンは，4 次元ポアンカレ予想を証明すると同時に，次の定理をも証明した．

定理　$\mathbb{R}^4$ と固有ホモトピー型が同じであるような 4 次元位相多様体は $\mathbb{R}^4$ と位相同形である．

さて，$V_i^4 = S^2 \times S^2 - F_i$ とおいて得られる 4 次元多様体は $S^2 \times S^2$ の開集合であるから，自然に微分構造が入る．この“自然な”微分構造を伴う V_1^4, V_2^4, V_3^4 のうち少なくともひとつがエキゾチックな

$\mathbb{R}^4$ なのである．各々の V_i^4 が $\mathbb{R}^4$ と位相同形なことは上に述べたフリードマンの結果で保証されている．V_1^4, V_2^4, V_3^4 のどれもが $\mathbb{R}^4$ と微分同相になる，ということはない．これを示そう．

矛盾をだすため，V_i^4 が $\mathbb{R}^4$ と微分同相であると仮定しよう．$\mathbb{R}^4$ の中には，もちろん，いくらでも大きななめらかな 3 次元球面 S_r^3（半径 r）が存在する．V_i^4 と $\mathbb{R}^4$ が微分同相なら，V_i^4 の中にも "いくらでも大きな" なめらかな 3 次元球面がなくてはならない．

もともと，$V_i^4 = S^2 \times S^2 - F_i$ であった．したがって，V_i^4 の中の，十分大きな 3 次元球面を $S^2 \times S^2$ の中に埋め込まれたものと考えると，コンパクト集合 F_i に十分近いはずである．特にそれは，O_i の中にとれ，F_i をつつみ込むような位置にある(図 3)．

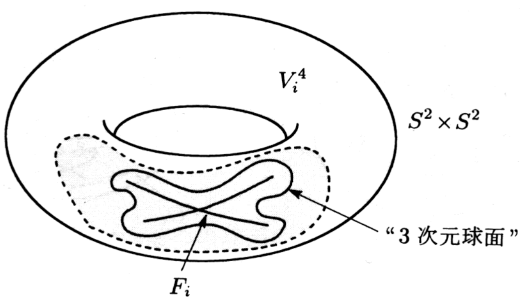


図 3

そこで再び O_i を $K3$ 曲面の中の開集合と考えると，図 2 の $K3$ 曲面の 3 つの "バツ印" を囲むように，なめらかな 3 次元球面がとれる．この "バツ印" は，交点形式 U に対応する 2 次元ホモロジーの台になっていた(図 2 の前に述べた定理の (i))．よって，その 3 次元球面の内側を $K3$ 曲面から取り除いて，4 次元円板 D^4 でふたをすると，なめらかな 4 次元単連結閉多様体 M' が得られ，その交点

形式は $E_8 \oplus E_8 \oplus U \oplus U \oplus U$ から3つの U を取り除いたもの，すなわち，$E_8 \oplus E_8$ となる．これはドナルドソンの基本定理に矛盾する．したがって，V_1^4, V_2^4, V_3^4 のどれか少なくともひとつは，$\mathbb{R}^4$ と微分同相ではない！

● ヤン-ミルズ場の登場

ドナルドソンの定理は，4次元多様体論にとって，基本的な重要性をもつものであるが，その証明もまた驚くべきものである．

証明には，素粒子論に現れるヤン-ミルズ場（Yang-Mills 場）の理論が使われるのである．この理論のわかりやすい解説は，だれか別の方にお願いしたいところだが，要するに，与えられた多様体 M^4 上でヤン-ミルズ方程式を考え，その解全体のつくる空間をゲージ同値で割った空間 N を考える．N は実は5次元の（特異点をもつ）多様体になり，しかも M^4 は N の "境界" と考えられるというのである．N の特異点の様子はよくわかるものであって，それを利用して M^4 の位相的性質が調べられる．

4次元多様体論に物理学的な理論が使われたのは，あるいは単なる形式上の類似だけなのかもしれないが，しかし，なかなか意味深長で夢をかきたてる事件ではある．

はじめの方で，高次元的なトポロジーの手法が4次元では行詰っていると述べた．"新しい4次元トポロジー" のありようがあるいはこの "事件" によって象徴されているのかもしれない．

付録2

断絶と連続

トポロジーにおける高次元と低次元

● 高次元と低次元

はじめから思い出話になって恐縮ですが，学生時代にスメール (S. Smale, 1930–) の「h-コボルディズム定理」を勉強した時の奇妙な気持ちは，今でもわりにはっきりと思いだします．スメールは高次元ポアンカレ予想を解決した有名なトポロジストで，h-コボルディズム定理はその解決に使われた手法を一般の単連結多様体に拡張して，ひとつの強力な定理として定式化したものです．その証明は，ミルナーによるプリンストン大学出版の講義録で100ページ以上もかかります．そんなに長い証明を要する定理を勉強したのはその時が初めてだったものですから，それだけでもかなりの驚きでしたが，定理の扱う多様体が5次元以上であるということも妙に気になりました．われわれの住んでいる空間は，たて，よこ，高さの3方向を備えた3次元空間ですし，「時間方向」を加えたとしてもせいぜい4次元です．5次元以上の空間を記述する h-コボルディズム定理のような定理はなにかしら空疎な定理であるような気がしました．

しかし，馴(な)れとは恐しいもので，5次元以上の空間のトポロジーを勉強していくうちに，空疎な感じも次第に薄らいでいって，いわ

ゆる高次元空間についての実在感のようなものが身について，自分自身でもいくつかの研究ができました．

われわれが高次元のトポロジーを勉強していたのは 1960 年代です．そして，60 年代は高次元トポロジーの全盛期だったと思います．60 年代最後の年 1969 年には，カービーとジーベンマンによって，高次元位相多様体についての三角形分割問題と基本予想が一挙に解決されるまでに到りました．そのような高揚期のあとを承けた 70 年代以降は 4 次元以下の「低次元」空間の研究が盛んになった時期と言えそうです．スメールをはじめとする多くのトポロジストが開発した高次元空間を攻撃する強力な理論によって，高次元（5 次元以上）のありようが明らかになったあとで，なぜこんなにも強力な理論が 4 次元以下の空間の研究には無力なのか，を誰しもが知りたいと思うようになったのだと思います．4 次元以下の空間には 5 次元以上の空間とは何か本質的に違うところがあるのだろうか，それとも，スメールたちの理論構成が悪いだけで，4 次元以下も 5 次元以上も本当は大して違いはないのだろうか．

やや単純化して言えば，70 年代はこれらの疑問に答えるべく手探りの研究が続けられた模索の時代，80 年代はドナルドソン理論とフリードマン理論の登場によって，高次元／低次元の断絶が明らかになった時代と言えます．もっとも，これは 4 次元トポロジーについての話で，もう 1 次元低い 3 次元トポロジーの世界では，すでに 70 年代にサーストンによる爆発的発展がありました．

● まつわり数

どんなに高級な理論もごく身近なところにその種(たね)があると思います．ここで言う「種」は「種明かし」のタネではなく，「その理論につながるささやかな現象」とでも言えるようなものです．高次元／低次元の断絶と，あとで述べるそれらの間の連続性，それから，キャッソン不変量やジョーンズ多項式などの華々しい理論の「種」は何かというと，それは「まつわり数」であると信じています．これは，個人的な思い込みに近いものかもしれませんし，専門家からは異論が出るかもしれませんが，ともかくもまつわり数を軸にして以下の解説を続けてみたいと思います．

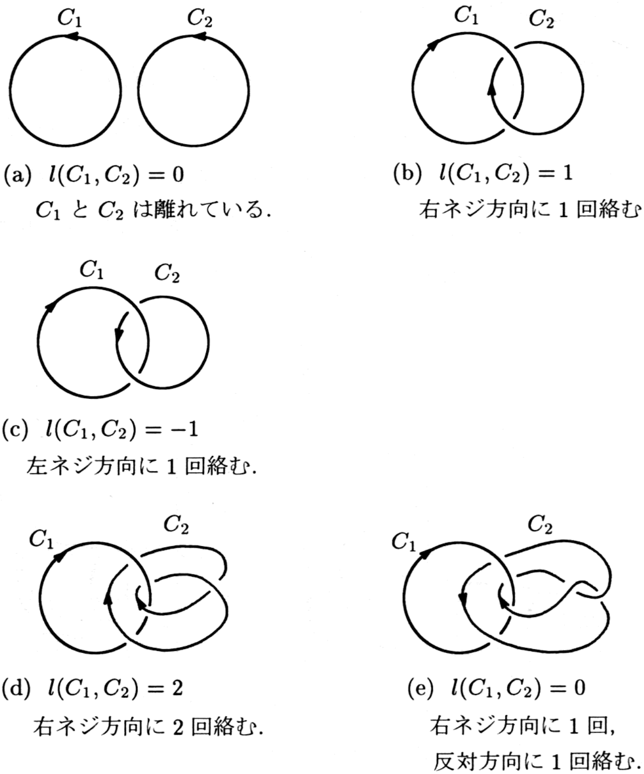
3 次元空間の中に 2 つの互いに交わらない閉曲線 C_1, C_2 があるとし，それぞれの閉曲線に向き（矢印）が与えられているとします．そうすると，それらの間の**まつわり数**（linking number）という整数が決まります．ここでは，C_1 と C_2 の間のまつわり数のことを

$$l(C_1, C_2)$$

という記号で表すことにします．

まつわり数がだいたいどんなものかは，次ページの図 1 を見てください．

要するに，まつわり数は 2 つの閉曲線が（右ネジ方向に）互いに何回絡んでいるかを表す数で，反対に左ネジ方向に絡んでいればマイナスをつけて数え，右ネジ・左ネジの両方向があればその差を数えるわけです．この数はトポロジーばかりでなく，環状電流のつくる磁場の計算にも現れることをご存知の方もいらっしゃると思います．



(a) $l(C_1, C_2) = 0$
C_1 と C_2 は離れている.

(b) $l(C_1, C_2) = 1$
右ネジ方向に 1 回絡む.

(c) $l(C_1, C_2) = -1$
左ネジ方向に 1 回絡む.

(d) $l(C_1, C_2) = 2$
右ネジ方向に 2 回絡む.

(e) $l(C_1, C_2) = 0$
右ネジ方向に 1 回,
反対方向に 1 回絡む.

図 1

さて，まつわり数は，その定義からしてじつは次元と深く関係しています．つまり，２つの閉曲線 C_1, C_2 のまつわり数は，それらの閉曲線が **3 次元空間**内に置かれているからこそ定義できるものであって，たとえば，平面（2 次元）上に互いに交わらない閉曲線を２つ描いた場合は，一方を他方に触れずにその平面から取り出せますから，まつわり数を定義したとしても 0 になってしまいます．また，4 次元空間の中に２つの閉曲線がある場合も，その２つは絡まりません．次にそのことを説明しましょう．

● 4 次元空間内の閉曲線たち

4 次元空間は 3 次元空間にさらに別の 1 次元方向を加えたものです．図 2 の平面が 3 次元空間を表していると（無理にでも）思ってみてください．われわれはこの一見平面に見える 3 次元空間の中に住んでいるものとします．この「平面」に直交する矢印の方向が 4 次元方向というわけです．

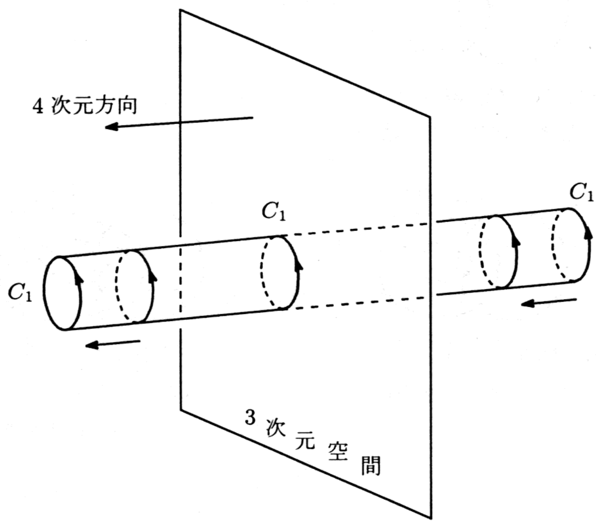


図 2

さて，図 2 には円筒が描かれていますが，これを 4 次元空間内を動く閉曲線 C_1 の軌跡を描いたものだと想像しましょう．閉曲線 C_1 は 3 次元空間の「右側」から 3 次元空間に近づき，それと一瞬交わったあとで「左側」の方へ通過して行きます．3 次元空間内に住む「われわれ」には 3 次元空間の内部しか見えませんから，「われわれ」にはあたかもある瞬間に閉曲線 C_1 がパッと現れ，すぐにパッと消え

たように見えるはずです.

もし，たまたま，パッと現れた C_1 にちょうど 1 回絡む位置に別の閉曲線 C_2 が（図 3 のように）描かれていたらどうでしょうか.

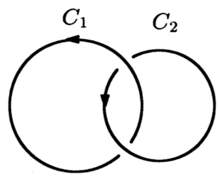
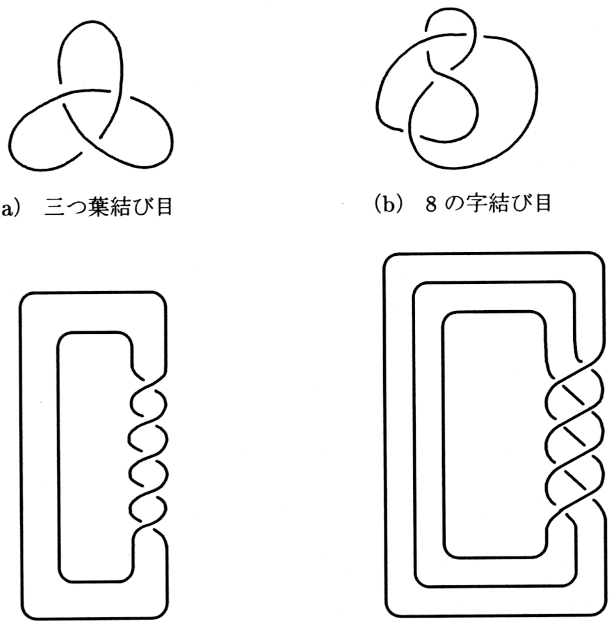


図 3

このときも別になんの違いもありません. 閉曲線 C_1 はたんにパッと現れパッと消えるだけですから，別の閉曲線 C_2 があろうがなかろうが，そのことには無関係にただ現れて消えるだけです. しかし，このことを，図 2 のような 4 次元空間全体のパースペクティブの中で眺めますと，3 次元空間内の図 3 のように絡まった閉曲線 C_1, C_2 の片方 C_1 を，他方の C_2 に触れずに 4 次元方向に取り出したことになる，ということがわかると思います. 4 次元の中で C_1 と C_2 がはずれてしまいました. このように，2 つの閉曲線が互いに絡み合うのは 3 次元空間に特有の現象で，4 次元空間では閉曲線が絡み合うということはないわけです.

3 次元空間内に置かれたひとつの閉曲線（ただし，自分自身と交わらない）を**結び目**といいます. 次ページの図 4 はいろいろな結び目の例です.



(a) 三つ葉結び目　(b) 8 の字結び目

(c) (2, 5) 型のトーラス結び目 $K_{2,5}$　(d) (3, 4) 型のトーラス結び目 $K_{3,4}$

図 4

図 4 で見るように，3 次元空間内には千差万別の結び目が（無限に）存在しますが，4 次元で「絡まり」がはずれたのと同様に 4 次元空間内に置いた結び目は皆ほどけてしまいます．皆，輪ゴムのように，結ばれていない「自明な結び目」になってしまいます．閉曲線が「結ばれる」現象も 3 次元に特有で，4 次元以上には存在しません．結び目のような面倒な現象が消えてしまうことが高次元のトポロジーを扱いやすくしている理由です．もっとも，高次元一歩手前の 4 次元には絡まりの現象の片鱗が少し残っています．それを図 2 の円筒の絵にもどって説明しますと，この円筒は閉曲線 C_1 の動い

たあとの軌跡を表していました．この軌跡にそって C_1 を動かすことで，C_1 と別の閉曲線 C_2 の絡まりがはずれてしまったわけですが，閉曲線 C_2 は，この軌跡自身には絡んでいると考えられます．これが絡まりの現象の「片鱗」です．5 次元以上になると，C_2 と軌跡との絡まりさえはずれてしまいます．

● 結び目の不変量 $R(K)$

3 次元空間では結び目はほどけないと言いましたが，次のようなインチキをすれば，ほどけます．それは，図 5 のように，自分自身を通過することを許して変形することです．このインチキな変形は，結び目の型を変えてしまいます．ところが，まさにこのことを利用して，結び目のある種の不変量を定義することができます．

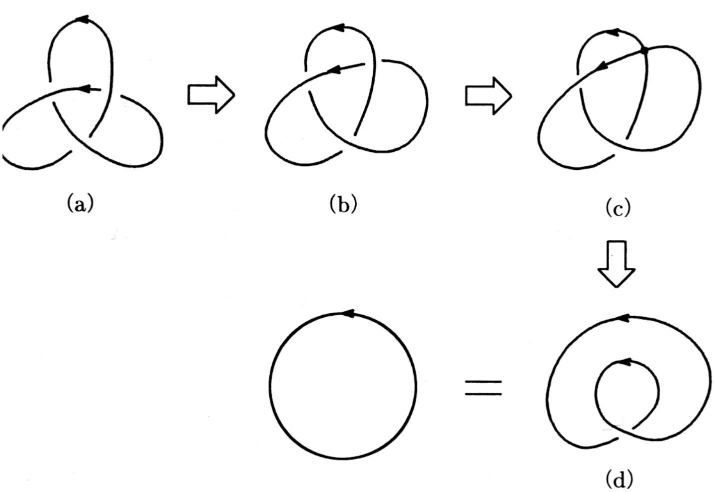


図 5

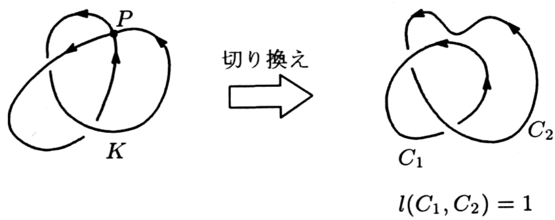


図 6

図 6 を見てください．これは，図 5 のインチキ変形の過程で結び目 K が自分自身と交わった瞬間です(図 5 の (c) の段階)．この瞬間に，自己交点 P における矢印の進む方向を（線路のように）切り換えてみましょう．すると，結び目 K は 2 本の閉曲線 C_1 と C_2 に分かれてしまいます．C_1 と C_2 のまつわり数 $l(C_1, C_2)$ を考えると，いまの場合は 1 です．そこで，はじめの結び目 K の $R(K)$ という不変量を

$$R(K) = 1$$

と定めます．

いまは，1 回だけの「インチキ変形」で自明な結び目になってしまうという簡単な場合でしたが，一般には，結び目 K は，自分白身と 1 回だけ交差する変形で他の結び目 K' に移るはずです．またそのときに上のようにして計算されるまつわり数 $l(C_1, C_2)$ も 1 とは限りません．このとき，$R(K')$ がすでに計算されているとして，$R(K)$ を

$$R(K) = R(K') + l(C_1, C_2)$$

と定めます．ただし，すべて "mod 2" で考えることにします．つまり，$R(K)$ は 0 または 1 の値しかとらない不変量で，偶数は 0，奇数

は 1 と思うわけです.「インチキ変形」によってすべての結び目はほどけてしまいますから，上のように定義することによって，ほどけるまでに必要な自己交差の回数に関する数学的帰納法で，$R(K)$ が任意の結び目 K について計算できることになります．じつは，この $R(K)$ は古くから知られている**ロベルテロ不変量**（または**アーフ不変量**）とよばれる結び目の不変量に一致します．ロベルテロ（R.A. Robertello）自身は別の方法でこの不変量を定義したのですが，上のように考えますと，ロベルテロ不変量の本質はまつわり数であることがわかります.

図 4 の結び目について $R(K)$ を計算してみましょう.

$$R(\text{三つ葉}) = 1, \quad R(8\text{ の字}) = 1,$$
$$R(K_{2,5}) = 1, \quad R(K_{3,4}) = 1$$

と，どれも 1 になってしまいます.（これは単なる偶然です.）

● ロホリンの定理

「多様体」とよばれる空間があります，空間内のどこでも好きな所に m 次元局所座標系が描けるような空間が m 次元多様体です．ある m 次元多様体 M が**平行性をもつ**というのは，M 上に m 本のベクトル場 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ があって，M の各点でそれらが一次独立になっていることです．また，M が**概平行性をもつ**というのは，M から 1 点を除いた残りの部分が平行性をもつことである，と定義します．これらの言葉を初めて聞く人にはあまりイメージがわかないかもしれませんが，我慢してください．とにかく，そういう概念があります.

ロホリンの定理は「閉じたなめらかな4次元多様体 M が概平行性をもてば，M の符号数（とよばれる整数値不変量）は16で割り切れる」ということを主張する定理です．この定理は4次元トポロジーの最も基本的な定理ですが，不思議なことに，**5次元以上**の位相多様体の三角形分割問題と基本予想を背後から統制しているのがこの定理なのです．はじめに述べたカービーとジーベンマンの理論がこのことを明らかにしました．断絶しているはずの高次元と低次元のトポロジーの間には，ロホリンの定理を通してのささやかな連続性（連絡）があったわけです．（もう少し詳しい説明は，拙著『4次元のトポロジー』（日本評論社）をご覧ください.）

ロホリンの定理のロホリン自身による証明（1952年）は難解ですが，じつはロベルテロ不変量を使った初等的証明が可能です(松本，1976年)．それは (p,q) 型トーラス結び目 $K_{p,q}$ のロベルテロ不変量 $R(K_{p,q})$ の計算から出発するものです．$K_{p,q}$ がどんな結び目かは，図4を見ると想像がつくと思います．いま，s を奇数とすると，$(s,s-1)$ 型のトーラス結び目のロベルテロ不変量は

$$R(K_{s,s-1}) \equiv \frac{1}{8}(1-s^2) \pmod 2$$

となります(この式の右辺は0または1に落して解釈します)．じつは，ロホリンの定理をこの式から出発して証明することができるのです．ロベルテロ不変量の本性はまつわり数だと述べましたが，こうなると，ロホリンの定理の本性もまつわり数だと言うことができるのではないでしょうか.

● キャッソン不変量

またまた思い出話になって申しわけありませんが，ロベルテロ不変量からロホリンの定理が初等的に導かれることを注意した小さな論文を 1976 年に書いたとき，今から思うと実に簡単な，しかももったいない見落しをしてしまいました．それは，ロベルテロ不変量の計算式

$$R(K) = R(K') + l(C_1, C_2)$$

を，0 と 1 に落さず，整数値のまま考えてみることをサボッてしまったことです．これを整数値のままで考えれば，すぐに，ロベルテロ不変量を拡張する**新しい整数値不変量**が得られたはずなのです（ただし，整数値で考えるときは，まつわり数 $l(C_1, C_2)$ の前の符号を＋にするか－にするかは自己交差の状況に応じて変えなければなりません）．当時は 4 次元の方にばかり目が向いていて，結び目の新しい不変量を定義しようなどとは全然思わなかったのですが，それが我ながらウカツでした．

この新しい整数値不変量 $\lambda'(K)$ は 1985 年キャッソンによって定義されました．彼は，3 次元ホモロジー球面とよばれる特殊な 3 次元多様体に対し，昔から知られていたロホリン不変量という 0 または 1 の値をとる不変量を整数値に拡張し，現在キャッソン不変量とよばれる不変量 λ を定義したのですが，その同じ仕事の中で，$\lambda'(K)$ も同時に定義しました．そして，キャッソン不変量と $\lambda'(K)$ とは，その本性においてだいたい同じものであることも明らかにしています．

ということであれば，λ' の計算式

$$\lambda'(K) = \lambda'(K') \pm l(C_1, C_2)$$

を通して，キャッソン不変量の本性もまた，まつわり数だと言えなくもありません．

他方で，キャッソン不変量は，離散群の表現論やゲージ理論とも深く結びついた不変量であることが知られています．

さらに，3次元多様体については，キャッソン不変量をもう一段高度化したフロアー（A. Floer）によるインスタントン・ホモロジー群，ウィッテンや河野俊丈氏，牛腸（ごちょう）徹氏たちによる，2次元共形場理論に結びついた新しい不変量などが続々と発見されていて，その豊饒（じょう）さには目もくらむばかりです．

● 結論的に言うと

> 高次元のトポロジーは扱いやすい．なぜなら（閉曲線の）結び目がないからである．低次元トポロジーは結び目の分だけ複雑であり豊かである．3次元空間で定義される「まつわり数」は，0と1に落せば4次元にまで生きのびる（絡みの片鱗＝ロホリンの定理）．そしてロホリンの定理は低次元と高次元の連絡をつける．まつわり数を整数値のまま扱うと，3次元多様体の不変量に姿を変える（キャッソンの理論），そして低次元特有の豊かな不変量の洪水につながっていく．

ということになると思います．

索　引

●編集部より

本シリーズは，1997 年発行の『改訂版 幾何学をみる』を分野ごとに独立させ，加筆・修正し，組み直したものである．本書では，その後の発展を中心に本文への補足，「コラム」，「索引」を追加し，関連記事を収録した．さらに図版等の修正を施した．

著者紹介

松本幸夫（まつもと・ゆきお）

1944 年　埼玉県に生まれる

1967 年　東京大学理学部数学科卒業

現　在　学習院大学理学部教授．理学博士

専　門　位相幾何学

著　書　『4 次元のトポロジー』（日本評論社）
『トポロジー入門』（岩波書店）
『多様体の基礎』（東京大学出版会）
『Morse 理論の基礎』（岩波書店）

幾何学をみる①

トポロジーへの誘い——多様体と次元をめぐって

2008 年 2 月 6 日　第 1 版第 1 刷発行

定価はカバーに
表示しています

著　者　松本幸夫

発行者　西原昌幸

発行所　遊 星 社
164-0001 東京都中野区中野 3 丁目 50-1
電話 (03) 3381-5914　振替 00140-5-137657

発売元　星 雲 社
112-0012 東京都文京区大塚 3 丁目 21-10
電話 (03) 3947-1021　Fax (03) 3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　ISBN978-4-434-11626-1